

2.2 Development of “specialized” theories of groups 群の特殊な理論の発展

前セクションで群論の発展における 4 大起源について概説した。第 1 起源 -古典代数- は、置換群論へと導き、第 2 起源 -数論- は、可換群論へと導き、第 3 第 4 起源 -幾何と解析- は、変換群論へと導いた。私たちは今、これらの特別な理論におけるいくつかの展開をスケッチしてみよう。

2.2.1 Permutation Groups 置換群

より前に言及されるように、ラグランジュの 1770 年の研究は、方程式の解法の研究との関係における置換の研究を開始した。それは多分、数学史における群論的な思考を暗示する初めての事例だった。それは、19 世紀の 30 年代までになされたルッフィーニ、アベル、ガロアの研究と、置換群の概念に直結した。

ルッフィーニとアベルは、リゾルベントに関するラグランジュのアイデアを基にすることによって、5 次方程式の非可解性を証明した。ラグランジュが示したこと、それは、 n 次一般の代数方程式の可解性のための必要条件は、 n より低い次数のリゾルベントの存在である。ルッフィーニとアベルは、そのようなリゾルベントは n が 4 より大きい時は存在しないことを示した。そのプロセスにおいて、彼らは置換論の諸要素を展開した。しかしながら、基礎的な概念的な進歩を達成し、多くの人から（置換）群論の創始者とみなされているのはガロアだった。

彼は、代数方程式の解法についてのラグランジュ、アベル、およびガウスの研究も精通していた。しかし、彼の目標は、方程式の可解性のために方法を見つけることを、はるかに越えていた。彼は、一般的な諸原理へと洞察を得ることに関心を持っていた、そして実際に彼が先駆者達の方法に不満だった。“この世紀の最初から”、と、彼は書いている、“計算的な手続は複雑になり、そういった手段によってはいかなる進歩も不可能になっていくだろう。”

ガロアは、「ガロア理論」— 体と群の対応関係— と、方程式の解法への応用との間の区別をきちんとわかっていた。というのは、彼は理論の「一般的な諸原則とただ一つの応用例（5 次方程式が解けない）について」を提示しますと書いていたから。「ガロア理論に関する初期の解説者の多くは、この二つの違いを明確に理解することに失敗して、理論を犠牲にして応用の協調へと導いた。」 [19]。

ガロアは、専門用語的な意味で「群」という用語を最初に使用した人物であり、彼にとってそれは乗法の下で閉ざされている置換の集まりを意味した：「もし同じ群の中に置換 S と T を持つならば、（合成）置換 ST もその中に確実に持つ。」彼は、代数方程式の最も重要

な特性が、方程式 — “方程式に対する群” — に一意的に結びつくところの群のある特定の諸性質に反映されていることを認識していた。これらの特性を説明するために、彼は正規部分群の基本的な概念を創り、それをを用いて大きな成果をあげた。

リゾルベント方程式がラグランジュ、ルフィニ、アベルの頭の中を占めていた時、ガロアの基本的な考えは、リゾルベントの構成にはかなりの技を必要としたので、それらをバイパスすることだったし、はっきりした方法論に基づいていなかった。ガロアはリゾルベントを考える代わりに、リゾルベントの存在は方程式の群（ガロア群）のなかに素数のインデックスの正規部分群の存在と同値であると気づいた。この洞察は、リゾルベント方程式の考察から方程式のガロア群とその部分群への考察へとシフトさせた。

ガロアは、方程式のガロア群を次のように定義した。

m 個の根が a, b, c, \dots である方程式が与えられたとせよ。そこには a, b, c, \dots の置換の群が常に存在する、その群は次の性質を持つ (1) その群の全ての置換たちに対して不変である根の全ての関数、有理的に知られている [すなわち、係数とそれに表される量の有理関数である]; (2) 逆に、根のすべての関数は、これは有理的に表現でき、これらの置換に関して不変である [19]。

このガロアの定義は本質的に以下のことを述べている。方程式の群とは、以下のような置換からなっている。方程式の係数体上で根の間のすべての関係を不変のままにするような根の置換から成る、つまり基本的に今日私たちが与える定義と同じである。もちろん、その定義はそのような群の存在を保証するものではなく、ガロアはそれを証明することを続けた。次に、「基礎体」に新しい要素が添加されたときにその群がいかなる変化をするかという問題を探求した。彼の取り扱い、現代代数テキストにおけるこの問題の標準的な扱いに近かった。

ガロアの研究は理解され、普及されるのに時間がかかった。実際、ガロアの研究は 1830 年頃に成されていたのだけれども、それはガロアの死後に 1846 年にリュービルによって、ガロアの技術的な達成点を超えて出版された。

ガロアは、後の展開を実質的に 2 つの方法で決めた。一つには、彼は明確に概念と計算に基づく証明を与えることができなかつたのであるが、そういう諸定理を発見したので、ついでには、彼の後継者がギャップを埋める必要を見つけることは必然だった。一方、これらの定理の正しさを単に証明するだけで十分でなかつた。実態、すなわちそれらの群論的コアが抽出されなければならない [33]。

詳細については、[12]、[19]、[23]、[25]、[29]、[31]、[33] を参照してください。8.3 章も参照してください。