「A History of Abstract Algebra」勉強会…第２回

（p2-3）

1　History of Classical Algebra

1.2 The Greeks 古代ギリシャ

古代ギリシャの数学は幾何 geometry と数論 number theory において、代数と比べて相対的に高度で洗練されていたけど、代数 algebra に関しては進展あまりなかった。

ギリシャは幾何においては抜群に優れていたことは確かで、その後に出てくるユークリッドはその典型ですけど、実は代数学に関してもディオファンテス Diophantus という人がいますが、古代ギリシャといってもユークリッドからはずっと後になるのですが、今の高校生のレベルよりずっと高い。

ユークリッドの偉大な業績である Elements（原論）は、代数学の注目すべき例外と、歴史家によって解釈されてきたいくつかの parts(要素)も含んでいる。いくつかの要素とは、もし代数学的に翻訳されるならば代数学的な諸結果、例えば２次方程式の解法とした代数の法則、を生み出すところの幾何学的な命題を含んでいる。幾何学的な命題と言っているが、直せば代数のことを言っている。これは昔から論争になってきたもので、原論の第２巻の話です。この仕事は、幾何学的な代数 geometric algebra（この命名は著名な数学者カンディアベルデンの言葉に由来している）として知られている。展開しているのは幾何学なんだけれども、それは幾何学の衣を着せた代数学ということです。

例えば、原論 Proposition II.4 では、以下のように述べている。「あるまっすぐな線で任意に分けると、全体の正方形は、２個の諸部分 parts の正方形とその諸部分 parts で囲まれる長方形の２倍を合わせたものに等しい」

「和」という言葉が出てこない。なぜかというと、ユークリッドの幾何学的なものは、「面積」とも言っていない。だけど普通の人が読むと面積と解釈してしまう。面積のようなメトリックな定量的なことが出てこないのが重要である。

例えば三角形の角 ABC について、角の大小を語るとき、角 B は角 C よりも小さいならば角 B の対辺である AC は角 C の対辺である AB よりも小さい。角の大小によって辺の大小が決まる。その時に何倍大きいとか具体的な数値のことを言っているのではなく、そこにメンション（言及）しない。大小関係といういわば定性的な関係だけしか述べない。これが原論の非常に大きな特徴です。近代の科学とか学問は何でもかんでも量で表さないと気が済まないという。今日は暑いですねと言わずに２０度ですという。本当は２０度がどんなものかわかっていないのに。今日は蒸し暑いですねとか暑いですねとかいうだけでは満足しない。定量的な記述が厳密な記述だと信じ込んでいる。一方古代の文化の大きな特徴は、定量的なアプローチはいわば下賤の者のすることで、哲学や学問をする人のやることではない、と言わんばかりに定量的なアプローチを嫌っている。

直線が分けられる二つの部分を、a と b と示すとしたら、命題は代数学的に$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$として述べることができる。

Proposition II.11 は、「全体と一つの線分で囲まれた長方形が、残りの線分上の正方形に等しくなるような直線で分けること」。

それは、代数的には、$a(a-x)=x^2$ の方程式の解を求めている。

この式は、黄金比を出す有名な式です。

$a : b = b : (a + b)$

が成り立つときの a と b の比が黄金比になる。

この比から、次の式を作ることができます。

$a(a + b) = b^2$

$-b^2 + ab + a^2 = 0$

解の公式を使って解くと、答えは、

$b = (1 \pm \sqrt{5})/2$

次の点には注意しなさい。古代ギリシャの代数学というのは、いわば、数というよりはむしろ量で語っている。

数と量は、本来違うものか、小学生中学生高校生は気楽に言いますが、本当は難しいわけです。ギリシャでは常に線分について語っているので、線分の長さというのはしばしば量みたいなもので、小学生の頃、数と量について教えるときに、長さとか重さというのは量で、個数というのは数だと、教えている。中学生でもそんなふうに教えている。数と量という厳密な区別は高校になってからで、三角関数とか指数関数が出てきたときに、そこに出てくる x や y は何なのかと問われると、高校の先生たちはそこで本当は困るはずなんですけど、なんかあんまり困ってないようですね。そこでは言ってみれば数そのものの世界が確立しているというべきで、その時の数は実数でして、古典的な意味での数ではない。一方、物理では量が大事で、質量であるとか速度であるとか時間であるとか、そう言った物理量と言われているものは自明を持った量として語られている。言ってみれば、数は数学の世界のものであり、量は物理の世界のものであるというのが１９世紀以降の常識的な世界観だと思います。今の日本の学校教育では、そういうことさえはっきりしていない。だから一番困ってしまうのは、例えば log x の対数関数が発散することを言うために、例えば log の 10 を計算すると　log10 で１であると、100 で２になる。かたや 10 センチで１、100 センチ行って２、1000 センチ行ってやっと３、そのくらい遅いと説明する人がいるのですが、これはバガげていて、長さを用いて対数を扱ってはいけない。数とは何か、量とは何か、と言うことについて、根本的な対立が、いわば古代からずっと議論があったと言うことを全く知らないと、小学校の時の数と量の教え方で曖昧に習ったことが、中学校高校に行くにつれてさらに曖昧になって行

く。本当に数学らしい数学に出会う高校 2 年生くらいの時に、依然として学校の先生が小学校の時の感覚で教えてしまうので、非常に具合が悪いと、僕は思うのです。

Babylonians 古代バブロニアと比べると、古代ギリシャでは代数学は相対的に弱かったのだが幾何の言葉で常に語られていたので、方程式というのは数が相手というのではなくて量が相手だったと、この著者は言いたいのだ。ただし、かなり曖昧で危ない主張である、良識的ではあるけれども。

さらに、代数式における同時性は厳しい制約条件だった。

要するに同次に既得、と言われるのですが、例えば多項式を構成する項の次数が全部一致している、だからその次に具体的に出てくるのだけれど、だけど $x + x = x_2$ は絶対認められないわけですね、まともな式としては。なぜかというと、x_2 は２次式であり、x は１次式です。２次と１次が入り混じることは許されない。だから２次式は全部項が２次、１次ならば全部１次。バビロニアの時は数でありましたので、例えば $x_2 + 3x = 2$ と言われれば、次数という問題はあまりなかったのだけれど、もし代数的に表現するとすればギリシャの数学はこういう風になっている。ギリシャの数学は正方形とか長方形とかだけですから、２次にすれば全部２次になる。２次の間の足し算の結果が２次になる。そういう意味で、次数が全部同次式で構成されているというのが絶対条件だったということ。

式における全ての項は、同じ次数でなければならない。例えば、$x_2 + x = b_2$ は、正当な方程式として認められない。

さらに重要なギリシャ代数学の業績は Diophantus' Arithmetica　（ディオファントスの数論）である。数についてのいろいろな議論を Arithmetic という。ギリシャ語の数という意味の Arithmo（アリスモ）からきているので、日本ではこれを算数って訳すので、何か初歩的なことになってやるクイズ問題などと思っているが、そうではない。Diophantus は、ユークリッドの時代から 500 年以上経っているわけで、だから時代は全然違うのですけど、彼の数論はすごくレベルが高い。

Diophantus の Arithmetica は、本質的には数論の本ではあるけれども、整数や有理数の方程式の解法を含んでいる。代数学における進歩という点では重要なこと、部分的代数的記号法が導入されていることである。代数的記号法とは、数を扱う代わりに文字を使用したことである。小学校では、３とか５とか数（数）を扱って来たが、中学になると x を使って方程式を扱う。これが代数学の最初の大きな出会いになる。数の代わりに文字を使って表すというような代数学的な手法は、実は古代ギリシャの Diophantus の中に見出される。最も重要なことは代数で記号を導入したこと：ς シグマは未知数（ζ ゼータではない）、Φファイは引き算、Īō イオシグマは等しいという相当性、Δ^{σ}　（デルタの上付き

シグマ）は未知数の平方、K$^{\sigma}$（カッパの右肩シグマ）は立方、Mミューは未知数の不在（我々は x_0 と書く）、を表している。
多分、Δはダブルで平方、Kは球で立方を表し、未知数σは、ギリシャ人にとっては同じなのだ。
$x_3 - 2x_2 + 10x - 1 = 5$ は

K$^{\sigma}$ αςι ΦΔ$^{\sigma}$ βMα íσ Mε と書かれる。

係数は文字の後ろに、αは１、βは２、εは５、ιは１０。Mは１。プラスはいらないのです。並べればプラスに決まっている。マイナスは後ろにまとめる。今は掛けるは省き、足し算は省かないとなっている。A 掛ける b は ab と書くが、a + b はどうしようもないと教えていない。１２３は百二十三と言って、１+２+３でもなければ１x２x３でもない。中途半端な教え方ですが、僕らはそれに慣れているので、スラスラ言えるが、Diophantus の時代は違っていた。ま、こういう代数学があったということです。
（数は通常の文字で表された。その結果、例えば、αは１、εは５、さらに重要な点として言えば、加法についての記号+は無かった。かくして全ての正の係数をもつ項がまず書かれ、そのあとに負の係数を持つものが続いた。）
ある時期からミューの大文字として M がマイナスを意味すると考えると今の我々にはわかりやすい。
Diophantus は代数学において他の顕著な進歩もした。即ち、
(a) 彼は代数的記号法を持って仕事をする際の、二つの基本的ルールを与えた。一方の辺から他方の辺へ移行する際のルール、式の両辺から同一の項を消去するルール。移行するときはプラスマイナスが変わる、同一のものは消していいということ。
(b) 未知数の負ベキ、例えば x のマイナス２乗とか、の定義をした。そして、指数法則を明確にした。

$x^m x^n = x^{m+n}$, for $-6 \leq m, n, m+n \leq 6$.

これは最も基本的な指数方程式ですが、未知数についての m 乗と未知数についての n 乗をかけたものが、未知数についての m + n 乗に等しい。

彼は m とか n を使ったわけではなくて Δ$^{\sigma}$、K$^{\sigma}$

を使って一覧表にしている。実際に彼が表したものは-6 から 6 までだったから、そういう風に限定されているのです。でも、驚くべきことに、普通、幾何学的イメージに囚われていたら、x の２乗とか x の３乗は言えるけど、x の４乗５乗は言えないはずです。
でも Diophantus は、数についての世界と考えているから４乗でも５乗でも怖くない。これが Diophantus の重要なことで、私が、ギリシャ時代に幾何学より代数学が遅れていたというのは言い過ぎだと言ったのは、この Diophantus のような人がいるからです。

(c) 彼は、負係数の演算についていくつかの諸規則を述べている。例えば、不足に不足をかけられた時には有用性が生じる。つまり、不足とは足りないもの、足りないものに足りないものをかけたら使えるものになる。Diophantus の言葉を英訳したらこうなるというので、決して良い英文ではない。Diophantus は日常の言葉を専門用語として使っているので、deficiency（不足） も日常用語としての不足を言っているわけではなくて。不足に不足をかけるなんて、形而上学的なことを言ったら子供達は悩んでしまうでしょう。有名な話ですが、スタンダールは借金に借金を重ねるとなぜ財産になるのかと、そういう風に悩んだみたいですね。負と負をかけるとなぜ正になるかといえば、知的な人にとっては生涯ずっとつきまとう深い謎のようです。僕が一般の人に対して講義するときに、フロアから必ず出る質問ですね。数の概念がきちんとできていないから、日常用語を使っているのですね。専門用語が難しいという人がいますが、専門用語の方が楽ですね。学校教育で、負のことを借金とか負の数は失敗のことだよとか、そういう風に教えてしまうのは非常にまずいですね。
(d) 彼は以下の古代ギリシャの伝統の鎖から離れていた。(ｉ)代数的な式に幾何学的な解釈を与えること、(ⅱ)項の節をたかだか 3 次までに制限すること、(ⅲ)代数的な式の項に同じ次元を要求すること。

Diophantus によって初めて代数的な世界が開かれている。
例えば二次方程式を幾何学的に解釈して教えるのはいいという風に教える先生がいるけれど、同時に規則に縛られてしまうのですね。方程式を考えるとき面積を考えなくてはいけない、そうなると学問的には古代に遡ることになる。Diophantus がどうしてそのとき 1 人だけ飛び抜けた頂点として存在し得たのかは謎の一つです。