「A History of Abstract Algebra」勉強会…第 11 回
(p20-21)
2 History of Group Theory
2.1.3 Geometry

ここでは、クラインの有名で影響力のある（ただし[18]を参照）「幾何学における最近の研究の比較論的なレビュー」というタイトルの講義を参照しています。その講義は 1872 年エルランゲン大学の学部に入学した時に講演したものである。このいわゆるエルランゲンプログラムの目的は、さまざまな変換群の下での不変量の研究としての幾何学の分類だった。ここに群たちが現れる、射影変換群、剛体運動（合同変換）群、相似変換の群、双曲線変換群、楕円変換群、それらに関連付けられた幾何と同じだけ変換群がある。（アフィン群はクラインによって言及されていませんでした。）クラインのエルランゲンプログラムへ導いたいくつかの背景について、ここで話しましょう。

19 世紀は、視界の広さと深さ両方で、幾何学の爆発的な成長に立ち会った。新しい幾何学が現れました：射影幾何学、非ユークリッド幾何学、微分幾何学、代数幾何学、n 次元幾何学、グラスマン拡張幾何学。さまざまな幾何学的手法の最高位はどちらか、総合的幾何か解析幾何か、計量か射影かを競争した。19 世紀半ばに、すなわち異なる幾何学と異なる幾何学方法と間に、どんな関係の分類があるのか、また内的関係があるのかについて主要な問題が発生しました。これにより、様々な変換の下で不変なる図形の諸性質の研究に焦点を当てた「幾何学的関係」の研究が生まれました。すぐに焦点は変換そのものの研究にシフトしました。したがって、図形の幾何学的関係の研究は変換に結びついた研究になりました。

さまざまな種類の変換（例：共線変換、円変換、反転変換、親和性）が特殊化された研究の問題に過ぎなくなった。したがって、諸変換の間の論理的な関係が研究され、そして諸変換の分類問題へと導き、最終的にはクラインの幾何学を、群論を用いて統合するということへと導いた。

クラインが幾何学を群に応用したことは、幾何学に秩序をもたらす最終段階でした。中間段階の一つとしては、1850 年代に始まった Cayley–Sylvester Invariant Theory（不変式論）、それは幾何学における分類の最初の主要な理論の基盤作りだった。ここではその不変式論の研究目的は、それらの変数の変換に関して不変な「形式」を研究することだった。(8.1 章を参照)。このケーリーの分類論は、クラインのエアランゲンプログラムの前身であり、はっきり群論的ではないけれど可能性としては群論的であると言えます。クラインの幾何学における群の使用もちろん、明示的でした。(暗黙のグループ理論的思考の徹底的な分析のためにクラインのエアランゲンプログラムにつながる幾何学の[33]を参照してください。)

次のセクションでは、クラインのエアランゲンプログラム（そして彼の他の研究）の群論の発展についての重要性を述べる。グランジュの研究の 100 年後、ガウスの研究の 80 年後

エアランゲンプログラムは開始されたので、その群論に対する重要性は、以下のような議論の後になって初めて、最もよく評価されることができるだろう。つまりラグランジュとガウスの仕事で持って始まり、1870 年頃終わる群論の歴史の議論のことである。