「A History of Abstract Algebra」勉強会…第 14 回
(p24-26)

2.2.1 Permutation Groups（その 2）

19 世紀前半における置換理論に対する他の主たる貢献者はコーシーだった。1815 年と 1844 年にいくつかの主要な論文で、彼は置換群の理論を自律的な主題として扱うことを開始した。コーシー以前は、置換は独立した研究の対象ではなく、むしろ多項式の解の探求のために有益な道具だった。しかしながらコーシーは、ラグランジュやルッフィーニ（ガロアの業績はまだこの時出版されていなかった）の業績に十分気づいていた。彼は、“代数方程式の可解性の問題の同時代の群論的定式化によって直接に閃いたものではないと明確に言っている”。*つまり、彼独自のものであると主張している。*

それらの主要論文で、コーシーは置換群の主題の初めての体系的展開を与えた。1815 年の論文で、乗法のもとで閉じられている置換の集合に対して、特別な名前を使わなかった。しかし、それらの重要性を認識し、そのような閉じられた集合の中の諸要素の数にある名前、“指標的約数”と呼んでいる、を与えた。1844 年、*およそ 30 年後に*、ある諸要素によって生成された置換の群の概念を定義した。

> 一つ以上の、置換（substitution はこの時は permutation と同様に使われていた）が与えられたとせよ。その置換は、要素 x,y,z,…,のいくつかまたは全てを含んでいるものである。置換自身または他によって色々な順序で作られる置換の積を、*導かれた*置換と呼ぶ。与えられた置換と導かれた置換と合わせて、今日*共役置換システム*と呼ぶものを形作る。

それらの論文の中で、それはとても有力だったが、コーシーは、いくつもの今日まで続くような、専門用語、表記法、そして置換論理の定理への追加を作った。例えば、今日用いる置換表記、置換のための循環表記と同じように、を導入したこと。彼は、置換の積、置換の次数、循環置換、互換を定義したこと。恒等置換を置換として認識したこと、今日２つの群の直積と呼ぶものについて議論したこと。広範囲に交代群を処理したこと。ここに、彼が証明した諸定義のいくつかの例がある。

(ｉ) 全ての偶置換は３サイクルの積である。
(ii) もし p が群の位数の約数ならば、位数 p の部分群が一つは存在する。これは、今日コーシーの定理として知られているが、しかしガロアによって証明なしに述べられている。
(iii) S_3 、S_4 、S_5 、S_6 のすべての部分群の決定（S_6 には間違いがあったけど）
(iv) 与えられた一つと換えられるすべての置換は群を形作る。それは今日、群の一つの要素の中心化群と呼ばれている。

置換群の文脈において、それらの結果が与えられて証明されるということは、言及される

べきである。詳しくは［6]、[8]、[23]、[24]、[25]、[33］を見よ。

これらの 2 つの展開の路線の冠している業績〜ガロアとコーシーの 2 つの主要なテーマの交響曲のように〜は、ジョルダンの重要で影響力のある 1870 年の*代数方程式と置換の理論*だった。ジョルダンは、“研究の目的は、ガロアの方法を発展させること、それを方程式論のすべての中心的な問題を解決できるということをいかに容易に示すことによって研究のふさわしいしかるべき主要な領域として確立すること”を述べたが、方程式論の可解性の理論分派としてではなく、実際には群論そのものです。

キーとなるアイデアに基づいた数学的統合を必死に努力するのが、ジョルダンの仕事の際立った特徴であり、その時代の他の多くの数学者、例えばクラインの仕事も同様だった。（置換）群の概念はジョルダンにそのような重要なアイデアを提供してくれるように見えた。彼のアプローチは、ガロア、コーシー、その他の人たちによる諸結果を統合して提示することを可能ならしめた。群概念の、方程式論、代数幾何、超越関数の理論や理論力学への応用は、また、統合と合成のテーマの一部でした。“彼の本でジョルダンは、代数幾何、数論、関数論のすべての中を、興味ある置換群を見出そうと思って、さまよい歩いた“ [20]。実際、彼の目的は、あらゆる領域毎に数学を探求だった。それは、置換群の理論がかつて応用されてきた領域（代数方程式）によって、もう一つはおそらく応用可能ではないかと見えるような領域（代数幾何）によって。“仕事は以下を表している・・・置換論的な形式における群論的思考法の登場という立場から同時代的数学全体を振り返って見る（概観する）” [33]。

Treatise（論文）は、その時までの（1860 年から 1880 年の間に彼は群について 30 以上の記事を書いた)、群に関するジョルダンの出版物のほとんどの内容を具体化し、多くの難しい問題に注意を向けた、根本的な諸概念を導入して。 たとえば、(置換）群の間の同型の概念と準同型の概念を明確にしたということと、「可解群」という言葉を初めて専門用語として導入し、技術的な意味で初めて、組成列の概念を導入し、ジョルダン・ヘルダーの定理の一部証明した、ジョルダン・ヘルダーの定理とは 2 つの組成列のインデックスが同じであること（商群の概念はその時点では明示的には認識されていない)； そして彼は置換群に対して推移性と原始性の非常に徹底的な研究を行って、多くのものを得たけれど後の人に乗り越えられてしまった。彼はまた、An が n> 4 に対して解けないことを証明した。

論文の重要な部分は、“線形群”とその部分群のいくつかの研究に捧げられていた。現代の用語では、これらはいわゆる古典的な群、すなわち、一般線形群、ユニモジュラ群、直交群、およびシンプレクティック群を構成していた。ジョルダンはこれらの群を有限体上でのみ検討し、いくつかの場合にはそれらの単純性を証明した。しかし、彼はこれらの群を行列や線形変換の群ではなく置換群として解釈したことに注意すべきである。

ジョルダンの *Treatise*（論文）は、群論の発展の大きな功績である。しかし、彼の置換論的な見方は、すぐに変換群としての群の概念に取って代わられることになった。(以下の

2.2.3 を参照)。 Traité[*Treatise*]は置換論的な群概念の進化と応用において、ブレイクする。それは、彼の時代の数学に概念的な統合をもたらすというジョルダンの深い希望の表現だった。彼がそのような概念的な統合を達成しようとしたことは、それは数学的発展のまさに次のフェーズで不当にも制約されていると映るけれども、栄光であるとともに限界だった。彼の本・・・[33]。詳細については、[9]、[13]、[19]、[20]、[22]、[24]、[29]、[33]を参照してください。