「A History of Abstract Algebra」勉強会…第 15 回
(p26-27)

2.2.2 Abelian Groups　可換群（その１）

すでに前に注意したように、アーベル群論のための主要な源は、Gauss'Disquisitiones Arithmeticae（ガウスの数論講義）に始まるところの数論である。（オイラーの数論的な仕事[33]における暗に示されたアーベル群論にも注意しましょう。）
置換論とは正反対に、数論の中での群論的な思考方法というものは、1870 年代に至るまで明示的でなかった。その時まで、「群」という述語の明確な使用は見出せない、そして置換論が盛んだった当時には全然それとの連携が見られなかった。*置換論では群論が花開いているのだから置換論と当然数論に応用することがあってもいいはずなのに、なかなか結合は起きなかった。*今、数論、特に代数的数論においてのいくつかの暗示的群論の研究の一例を挙げる。

代数的数論はフェルマーの最終定理との関係で登場してきた、【n を 3 以上の整数とするとき，$x^n+y^n=z^n$ を満たす正の整数 x,y,z の組は存在しない。】、それは、$x^n + y^n = z^n$　for n> 2 のゼロでない整数の時の非可解性と、２項２次形式ガウスの理論であるより高次の相互法則（ 3.2 章を見なさい）と関連して生じた。代数的数体および算術的特性は、研究の主要な対象であった。1846 年にディリクレが代数的数体の単位元 units(１位の数)を研究し、(私達の専門用語で言えば）これらの単位元が作る群は、有限階において有限巡回群と自由アーベル群との直積となっていると立証した。ほとんど同じ頃クンマーが彼のいうところの"イディアル数（理念的な数）"を導入した、理念的な数の間の同値関係を定義し、円分体に対してある特定の性質を持った同値類の数、我々の言葉で言えば円分体の類数と呼ばれるもの、もっと専門用語で言えば円分体のイデアル類群の位数、を導いた。 デデキントは２次体について同様の研究をその前にやっていた。

1869 年 シェリング は、ガウスの以前の学生だが、２項２次形式の同値類（の群）のガウスの構造を探求した（ 3 章を見なさい)。彼は、形式のすべての類が合成から得られるところのある種の基本類が存在することを見つけていた。群論的な用語で言えば、シェリングは２項２次形式の同値類の作る可換群に対する一つの基底を見つけた。

クロネッカーは、代数学で任意であることでクンマーの円分体の仕事を代数体へと一般化した。クロネッカーは、1870 年の"イデアル複素数の類のいくつかの特徴の表明"というタイトルの代数的数論に関する論文において、従来よりはるかに抽象的な視点を取ることによって始めた。彼が任意の「要素」の有限集合を考え、それらにある特定の性質*（例えば、結合法則を満足するとか、交換法則を満足するとか）*を満足させる抽象的な演算を定義したーー法則、それは今日有限可換群に対する公理として採用する所のものである。

アーベル群の公理とは、演算に関して閉じている、演算が結合律を満足する、演算に関して交換法則が成り立つ、単位元がある、逆元がある、ということである。

θ_1、θ_{11}、θ_{111}を有限個の要素とすると、それらの任意の二つに対して、ある確定した手順によってもう一つの要素が結びつけられるようなものとせよ。 かくして、fが手順として、θ_1、θ_{11}は２つの（等しいものであっても構わない）任意の要素であるとすると、f（θ_1、θ_{11}）に等しいθ_{111}が存在する。 さらに、f（θ_1、θ_{11}）＝f（θ_{11}、θ_1)、f（θ_1、f（θ_{11}、θ_{111})）＝f (f（θ_1、θ_{11})、θ_{111})、およびθ_{11}が異なる場合θ_{111}から、f（θ_1、θ_{11}）はf（θ_1、θ_{111}）とは異なります。 一旦これが仮定されると、等号（相等）の記号を使う代わりに同値の記号を採用するという条件のもとで、演算f（θ_1、θ_{11}）を積θ_1・θ_{11}で置き換える事ができる。 したがって、通常の同値の記号「～」を使用して、方程式f（θ_1、θ_{11}）＝θ_{111}によって同値θ_1・θ_{11}～θ_{111}を定義する。[33]