

2.2.2 Abelian Groups (その 2)

クロネッカーは、有限の可換群の暗黙の定義を与える過程の中で、「マグニチュード (量)」の結びつきの法則をひねり出すことをめざしていた。

クロネッカーは、量と量がどういう風に結びつくかで、 θ_1 と θ_2 から θ_3 作られ... という規則についてとにかく *working out* 絞り出すとか、規則をひねり出すということを目的としたわけですね。我々から見れば有限アーベル群の定義に過ぎないのだけれど、クロネッカーは「量」の結合の法則をひねり出すということを考えたのですね。「量」とは何か、わからないのですよ。

以上の抽象的な考察から、クロネッカーは次の諸結果を推論した。

(i) θ が今議論しているところの集合 (群のこと) の任意の「要素」とするとすれば、 $\theta_k = 1$ (k はある正の整数) であるとせよ。(θ を k 乗すると単位元になるということ)。そのような 1 になる数の中で k を最小値とするならば、 θ は「 k に所属する」ということにしよう。 θ が k に所属し且つ $\theta_m = 1$ ならば、 k が m を割り切る。

証明

$\theta_m = 1$ だとすると、 m を k で n 回割ると余り r が出る。 $m = k \cdot n + r$

m, k は整数でゼロより大きい。 $m, k \in \mathbb{Z}$ $m, k > 0$

$1 = \theta_m = \theta_{kn+r} = (\theta_k)_n \theta_r = 1 \cdot \theta_r$ $\theta_r = 1$; r は k で割ったあまりだから $0 = r < k$ k が最小といったのだから r が 0 以上だと k の定義に反する。だから $r = 0$ となり、 m は k で割り切れる。これは非常に大事な定理です。

(ii) 要素 θ が k に属している時、 k のすべての約数は、 k に属するある要素 (複数あっても良いが少なくとも一つの) を持っている。

$\theta_k = 1$ とすると、 k の任意の約数を $k = k_1 \cdot k_2$ と因数分解されたとすると、 $\theta_{k_1 k_2} = 1$ ということは $(\theta_{k_1})_{k_2} = 1$ いま k_2 は k の約数ですが、 k_2 というのに属する要素は $(\theta_{1 k_1})$ 、つまり k_2 乗したら 1 になる要素があるということ。

(iii) θ と θ_1 が、それぞれ k と k_1 に属し、 k と k_1 が、互いに素であるならば、 $\theta \theta_1$ は kk_1 に属している。

$\theta_k = 1$ $\theta_{1 k_1} = 1$ であるから、 $(\theta \theta_1)_{kk_1} = (\theta_k)_{k_1} (\theta_{1 k_1})_k$

属しているとは、クロネッカーが言っているので、今では位数 kk_1 という。

(iv) 要素 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ の一つの「基本システム」が存在する。つまり、与えられた集合の各要素をたった 1 回だけ (一意的に) 表現するような $\theta_{1h_1} \theta_{2h_2} \theta_{3h_3} \dots$ ($h_i = 1, 2, 3, \dots, n_i$) が存在する。

自由アーベル群のこと。

θ_1 は n_1 乗したら 1 になる、 θ_2 は n_2 乗したら 1 になる、 θ_3 は n_3 乗したら 1 になる、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ は位数であって、まだ条件がある。

それぞれ $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots$ に属する数 $n_1, n_2, n_3, \dots$ は、それぞれはその次に来る数 $(n+1)$ に
よって割り切れる；積 $n_1 n_2 n_3$ はその集合の要素の全体の個数と等しい。

θ_1 は 1 から n_1 まで変われる、 θ_2 は 1 から n_2 まで変われる、例えば h_1, h_2, h_3 とかは全部
 n_1, n_2, n_3 になったとき 1 ですから単位元を表している。 θ_1 の取りうる値の個数が n_1 個、
 θ_2 の取りうる値の個数が n_2 個、 θ_3 の取りうる値の個数が n_3 個、累上のベキがね、それ
らを掛け合わせると全ての要素の個数が出て来る。だから、群を分解して巡回群の積に
 θ_1 で生成される群と θ_2 で生成される群と θ_3 で生成される群とあって、実際の群は全
部かけたもの。

上記は、もちろん、有限可換群の有名な結果と解釈できる。；特に (iv) はそのような群の
基本定理として解釈できる。クロネッカーはこの一般的な枠組を構築したあとで、彼はそれ
を、2 項 2 次形式の同値類という特別な具体例、およびイデアル類群に適用した。彼は、(iv)
を前者 (2 項 2 次形式の同値類) のものに適用する時、シェーリングの結果を得ることに言
及した (ページ 26 参照)。

クロネッカーは、有限可換群の暗黙の定義と、その時まで十分に確立していた置換群の概
念と関連させなかったけれども、そして彼は十分に気づいていたけれども、彼が採択した抽
象的な観点の利点をはっきりと認めていた。

非常に簡単な原則...それは示された文脈にだけではなく、しばしば他の場所 — 数論の
初歩の部分でさえにも応用可能である。これは次のことを示している、違った形から見ても
容易であるが、つまり、これらの原則が、より多くの一般的で、より多くの理念の抽象
的な領域に属しているということを。従って、それらの発展をすべての本質的でない制限
から解放し、それを異なる様々なケースに応用する時に同じ議論を繰り返すことを不要
にさせたことは、適切である。...また、すべての許容できる一般性によって述べられる時、
プレゼンテーションはシンプルさを得て、だから心落ち着き透明感のある中に、真に本質
的な側面だけが投影される。 [33]

発展の上記のクロネッカー路線は、1879 年にフロベニウスとシュティッケルベルガーによ
って、「交換可能な要素の群について」という重要論文の中で持ち上げられた。彼らはクロ
ネッカーの (抽象的なアーベル群) 理論の上に立って仕事をしたけれども、可換群の概念を
明示的に使い、さらに、抽象的な群の概念が、合同性とガロアの置換群と同様にガウスの形
式の合成を全部含んでいるという認識の重要な進展を作った。脚注において彼らが無限次
の群、すなわち数体の単位元の群と 1 のすべてのベキ根の群にも言及した。彼らの主たる成
果は、一意分解の証明を含む有限可換群の基本定理の証明であった。

クロネッカーの定理とそれに対するよりはっきりとした「現代的」な形式化を、比較するこ
とは興味深い：

既約でないつまり [分解できない] 群は、純粹に既約な因数に分解できる。ルールとし
て、そのような分解は多くの方法で遂行できる。しかしそれが実行する方法を問わず、

分解できない因子の数がいつも同じであり、2つの分解の因子は、同じ位数を持つ対応する因子とペアを組むことができる [33]。

一言で言えば、素因数分解の一意性を言っているのであって、 $12=2 \times 2 \times 3=2^2 \times 3$ ですよ。 $12=2 \times 6=2 \times 2 \times 3$ ともできる。分解するプロセスがどんなルートを辿ろうとも既約因数の個数は常に一定である。

彼らは、「既約因数」を素位数の巡回群と同一視するところまでいった。

$1, a, a^2, a^3, \dots, a^{p-1}$, までは全部異なるのだが $a^p=1$ となるのが巡回群で、位数が素数であるというのは p 個でなっているということになる。非可逆の素因数というのは、素位数の巡回群と同一であるということまで進んだ。

彼らは成果を、モジュロ m の整数群、 m は2項2次式と抽象数体におけるイデアル類の整数群へ応用した。

フロベニウスとシュティッケルベルガーによる論文は、“顕著な業績、現代の視点に近い方法で、それ自身の基礎の上に有限可換群の独立した理論を打ち立てた業績”である [30]。このセクションの詳細のために [5]、[9]、[24]、[30]、[33] を見よ。