「A History of Abstract Algebra」勉強会…第 1 回
（p1-2）

1 History of Classical Algebra

1.1 Early roots

この本では、中高の先生まで何のために教えているのか、中高生のレベルから現代代数学の生まれてくるプロセスを簡単に描写している。中高の数学から大学の数学への移行の最初の描写として 2 次方程式について第 1 章は書かれている。

難しいのは連立 1 次方程式で文字が増えた多元連立 1 次方程式、また次数の高くなった 2 次方程式、3 次方程式などの高次方程式が難しい。2 元といっても文字を減らすことができる連立方程式は簡単に解くことができるが、大学で行う線形代数では文字を減らすことができない方程式を扱い、とても難くなる。

本文で 1 次方程式についての記述がなくて 2 次方程式からの話となっているのは、やっと学問らしい学問になるからである。クイズの問題としても難しい。

イスラム世界やアラビア世界では古代から 60 進法を用いている。1 ページ下に書かれた方程式も現在の表記法を持っていなかったので、60 進法でかかれている。これは与えられた情報から具体的に値を求めている、つまり解の公式を教えている。小数表現は、イスラム世界、アラビア世界では古代から使われている。しかし、一般の文字係数を用いていないため出てくるものはすべて数となっているためわかりづらい。

この方程式 $x^2+(2/3)x=35/60$ で実数の根は二つで、正の根と負の根がひとつずつ出て、そのひとつが $x=1/2$ ですが、これはいきなり小学生に出したら難しい。この x を求めるのによくやるのが、面積を用いたりする方法で、一辺 x の正方形の一辺に 1/3 の長さを加えて x^2 と面積 $(1/3)x$ を 2 つと 1/9 の面積を加えると、一辺 $(x+1/3)$ の正方形の面積が 25/36 となると考えれば、正方形の一辺は 5/6 で、そこから 1/3 を引いて x が求められる。このようにやったのではないかというのが最ももっともらしくよく言われている説である。どのように考えられたのかという具体的な歴史は、よくは分かっていないのだが、2 ページの冒頭にあるように、方程式 $x^2+ax=b$ の解は、$x=\sqrt{(a/2)^2+b}-a/2$ で求めることができるという解の公式を古代の人々は驚くべきことに知っていた。どうしてこの問題をおもしろいと思ったのかはよくは分からないが、これは紀元前 1700 年、日本ですとまだ火焔土器の時代にこのようなことを考えていた人々がいたということになります。

バビロニアの代数的な知識について次の点が注目すべき重要な点である。

(a)代数的表記法つまり記号法がない。
我々は、中学校で最初に記号法を教える。小学校の算数と中学校の数学は何が違うかというと、文字を使うこと。小学校では線分で求めたいものを表したりしている。
この時代は、問題も回答、つまり解もすべて口で伝えられていた。つまり数学的な式(formula)がなかった。数学教育において、よく言われるのが数式があるから子どもたちから数学が縁遠くなるから、できるだけ言葉を使えばよいという考え方があるが、それはまるで紀元前 1600 年に戻すようなもので、我々がここまで延々と築いてきた数学の成果を伝えるのに、代数的記号は難しいのは事実ですが、この障壁を頑張って乗り越えることに意味があり、障壁をなくすことには意味がない、ということもわかることです。

(b)問題は数値係数をもった方程式（equation　等式と訳してもよい）を与え導いている。
特に、一般の方程式 $ax^2+bx+c=0$　a,b,c は任意の定数として与えられることは全くなかった。いまの中学生は ax= b などというものを学び、とても楽をしている訳ですが、このような記号法が紀元前１４世紀にはなかった、このような記号法ができたのは、Viete や Descartes、Fermat の時代であると高等学校の教科書にはかかれていますが、古代ギリシャの Diophantus が既にかなりのことをやっていたが、それはとても難しい記号で、いま使っているようなものではない。いま我々が使っているのは、Viete や Descartes 流の方法である。

(c)解法が予言的あるいは処方箋的（prescriptive）である。
何々すればよい、これこれをしなさい、そうすれば答えに到達するでしょう、といったもの。中学などではもうこのようには教えていないと思いますが、珠算教室などではこのように教えているかもしれません。これは古代の教育の典型で、いまだにこのような文化が残っているともいえます。
かくして（しかも)、手順についての手続きについての正当化つまり証明、何故正しいのかという説明がひとつもない。しかしながら、次から次へと例が蓄積することを通して、また同じタイプの問題の具定例が次から次へと蓄積することを通じて、バビロニアの数学的な解法について一種の解法の正当性、ある形の正当化が存在したということを示唆している。つまり、いろいろな具体例が次から次へと同じように解かれること、つまり、たまたま成功した訳ではない、一般的な方法がバックグラウンドにあったから次から次へと解くんだということがわかる。これは、教育を考える上でとても大切なことで、代数的な方法でなければ一般的な解法ではないので、具体例が沢山蓄積されることによって、何らかの意味で証明があったということが仄めかされる（indicate）つまり示唆される。そういうある種の証明が存在したということがわかったということは、大事なポイントである。

(d)諸問題というのは、解として唯一の正の有理数を生み出すものだけが選ばれていた。

つまり、例えば2次方程式で正の2実根や虚根などあってもいいのですが、必ず正根一個のものができた。これは2次方程式の解と係数の関係を考えればいいのですが、解の積が負となる2次方程式を考えれば、正根が一個、負根が一個となる。そういう問題しか考えられていなかった。さらに、2次方程式の解として唯一の根のみが与えられていた。つまり2つの根があるという2次方程式は考えられていなかった。これも興味深いことで、2次方程式を子どもたちに何のために教えるかというときに、解が2個あるという可能性(答えが1つではないということ)に初めて目覚めさせるという素晴らしいチャンスであると考えることができる。昔の人は答えが1つのものしかわかっていなかった。ゼロや負根や無理数の根というのはバビロニアの数体系の一部に、我々の知る限りでは、なかった。無理数というものが数体系に入ってくるのは本当に後になってからで、ギリシャ後期になってからです。負の数でさえ、実は近代になっても認められていなかった。負の数に初めて積極的な姿勢を取ったのは、Descartes、Fermat の時代である。

(e)問題はしばしば幾何学的な言語に翻訳されて(表現されて)いた。例えば square を平方と訳したり正方形と言ったりするが、平方もそもそも正方形からきている。立方も cube からきているが、幾何学的な言語に由来するというのはよくありそうな話で、人間にとって幾何学は決して離れたものではなく、恐らく子どもたちにとって一番難しいのは代数なのだと思う、人工言語ですからね。この独特の言語体系を理解できないと数学も全くわからない。例えば、a+b が b+a と同じであるということが了解されれば途端に、全く簡単な話なのですが、その最初のステップが難しい。
しかしながら、それは決して幾何学における問題ではない。つまり、幾何学の問題をわざわざ別の言語に置き換えようとするのではなくて、幾何学の言葉で書かれただけで、それが実用的に役に立つというものでは全くなかった。さっきの2次方程式の問題も意味はない。問題のための問題である。これはとても大切なことであると思うのですが。
これは、まるで学生を訓練するために仕掛けられたものであるかのようである。つまり、本当に抽象的な思考に耐えられるかどうかということを試す問題に見えるということで、過去のもの(官僚の登用試験など)はすべてそうであったのではないかと思う。
例えば、上の問題の正方形の面積と辺の長さの 2/3 を加え合わせるというような例を注意して見てください、ということですが意味があるとは思えないですよね、ということを言っている。
バビロニア代数の他の諸側面については、他の本を参照してください。
多分、古代バビロニアの代数学についてはオットードノウインエバウアーという人がすごく有名な本を書いていて、ほとんどの人がそれを典拠にしている。

中国人は、紀元前 200 年頃、インド人は紀元前 600 年頃、バビロニア人たちを越えた前進をした。バビロニア人たちよりも進んだ数学を知っていた。しかし、中国とインドについて

の日付は極めて粗雑である、本当には分からない、はっきりしない。どういう風に前進したかという具体例として、彼らは実際に方程式の係数として負の係数を許した。つまり、面積から何かを引いてなどといった問題も考えたということである。２根が出てくるという場合も、負根は許さなかったのですけれども。一つの２次方程式の解として２つの解があるということを認めるというところまで前進した。ですから、$x_2 - ax=b_2$ という形にすると２次方程式も解と係数の関係で和も正、積も正で２実根を持つ場合には、ふたつとも正となる。そういった場合まで考えるところまで進んでいた。
彼ら中国人、インド人たちは方程式をいじくり回す(manipulating)手でもって変形するということの手順、方程式、等式を変形する手順もきちんと述べていた。
しかし、それらの解のための記号ももっていなかったし、証明も持っていなかった。彼らの解法の代数的記号法として表すことも証明も持っていなかった。

中国人たちは、任意の実数の多項式の方程式つまり n 次方程式の解を近似するという方法を持っていた。任意実数の方程式というのは、何でもできるということではないのですが、ある種のタイプの高次方程式の近似解を得るということも知っていた。またこれも有名な話ですけれども、行列を用いて連立一次方程式を解くこともできた。行列というのは数の長方形の列、長方形に並んだものが一般的ですが、本当は、連立一次方程式というのは大学の立場で言えば、n 元、未知数が n 個、方程式が n 個という形で長方形に並ぶのが一般的ですが、正方形に並んだタイプの方程式しか多分知らなかったのだと思います。ですから、行列の概念を知っていたというよりは、行列式の概念を知っていた、つまり解の公式を知っていた、そのようなテクニックは西ヨーロッパに知られるよりはるかに昔から知っていた。これらについては、７、１０、１８番の本を見てみてください。これらの本は比較的新しいカッツなどによるものですが。これが古代の話である。言ってみれば、キリストの生まれる前の話である。紀元前 300 年というのはギリシャで言えば、ユークリッドが出てきたり、プラトン、ソクラテスなどの哲学者が出てきたりという時代で、中国というのがとても先進的という風には言わないが、やっぱりインドは恐るべきものがあって、紀元前６世紀というのは、ギリシャではタレスの時代に、すでにインドではということで、ヨーロッパの人がアジアを尊敬してくれる気持ちが高いことは嬉しいことです。