「A History of Abstract Algebra」勉強会…第 3 回

（p3-8）

1　History of Classical Algebra

1.3 Al-Khwarizmi アルクワリズミ

イスラムの数学者たちは 9 世紀から 15 世紀の間にかけて代数学上の重要な業績を達成しました。おそらく中でも最も際立っていたのは、Muhammad ibn- Musa al-Khwarizmi ムハマド イバムサ アルクワリズミであって、彼は 720 年頃から 850 年くらいまで生きたとされるが、“代数学におけるユークリッド”というように例えられる。というのは、*代数学*あるいは*代数的知識*、“代数学”（そういうものがその当時あったとして）に関して、それを体系化し、それを独立した研究分野として確立したからである。

彼はこの業績を彼の著書である al-jabr w al-muqabalah.（アルジャブル、アルムカーバラ）という本の中で達成した。“Al-jabr”（現在の“algebra”代数学に由来する）は、等式の負の項を他辺に動かすと、符号が正に変わることを意味している。*つまり移項のことを意味している。*また、“al-muqabalah”は方程式の両辺から同じ項は、消去できることを意味している。それらはもちろん方程式の解法の基本的手順である。Al-Khwarizmi(アルゴリズムの語源になった)は、その基本的手順を 2 次方程式の解法に応用していた。彼は 2 次方程式を 5 つのタイプを分類した。

⑴$ax^2=bx$、⑵$ax^2=b$、⑶$ax^2+bx=c$、⑷$ax^2+c=bx$、and ⑸$ax^2=bx+c$.

定数項を客体している。正の根と根がゼロのもの、＋－の根が対称的に出てくるものは－を取らないとしている。⑴は 1 次方程式に帰着する。⑵は最も基本的な 2 次方程式。⑶は 2 根の積が負で 2 根の和が正ですから正根と負根が一つずつ出る。正の 1 実根がでる。⑷2 根の和と積が正になっていますからこれは解を持たない可能性がある。 2 虚根の可能性がある。 2 実根を持つ場合 2 つの正根がありますから根を捨てることができないというので、理論的に最も難しいタイプ。

この分類化は、Al-Khwarizmi が負の係数とゼロを受け入れなかった故に、必要だった。彼はまた本質的に記号法を持っていなかったので、彼の問題と解法は、学問的な表現ではなくて会話調で表現された。例えば先にあげた 1 番目と 3 番目の方程式は、「平方たちが根たちに等しい」、（*平方たちとは x^2 の何倍か $3x^2$ とか、根たちとは x の何倍か $4x$ とか）*「平方たちと根たちは数に等しい」（未知数（*つまり x のこと*）を根と呼んだ）と表現される。*未知数のことを、根と言う言葉で最初に使ったのは、この Al-Khwarizmi を翻訳した人だけど、本当は方程式の解の意味で使ったのです。*

Al-Khwarizmi は、幾何学的ではあるが、解法の手順に証明を与えた。

次は、彼の解法と問題の一つの例である。

「正方形とその辺の 10 倍分だけ増加させられた時、39 となる解を求めなさい。」

(即ち solve $x^2 + 10x = 39$).

解：辺 roots の数（x の係数）を半分にしなさい。今日の例では、5 が得られる。それを今度は二乗する。結果は 25。39 に加えると 64 になる。64 となる正方形の辺、それは 8 を得る。その 8 から辺 roots の係数の半分即ち 5 を引く。残りは 3。これが、探していた正方形の辺である。
記号的に、この処方は次の通りである。
$\sqrt{[(1/2) \times 10]^2 + 39)}$—(1/2) ×10
ここに Al-Khwarizmi の証明がある。図 1 のように gnomon （グノーモン；平行四辺形から対角線上に頂点を持つ平行四辺形を取り除いた L 字形の図形）を作図し、1 辺が 5 となる正方形を加えて、図 2 の正方形になるように完成させなさい。正方形は長さ x+5 の辺をもつ。しかしそれは、x_2+10x+5_2 =39+25=64. から長さ 8 となる。したがって x = 3.
今言ったことを全部まとめると、係数の 2 分の 1 を作ってそれを平方して 39 に加えて、その平方根をとって、それから 2 分の 1 を引く。ということを行なっている。
15,6 世紀の西ヨーロッパの数学者たちのいくつか貢献について、短く述べておきましょう。“abacists”アバシスト（“abacus”そろばんを語源）または“cos-sists”コシスト（ラテン語の“thing”ものを意味するで、未知として使われた“cosa,”を語源 ）として知られている彼らは、以前の表記法と手順のルールを拡張し、一般化した。
この類で大きな影響を与えた作品は、1494 年に印刷（印刷機が発明されたのは 1445 年）された最初の数学本の一つ Luca Pacioli’s Summa （ルカ・パチョーリのスムマ）である。例えば、“co”(cosa) を未知数として使用し、初めての 29 乗に対して、“p”(piu)をプラス、“m”(meno)をマイナスとして記号を導入している。さらに、平方根として Rx (radix) 、立方根として Rx.3 を使用した。1557 年 Robert Recorde （ロバートレコード）は、
“noe 2 thynges can be moare equalle.”の証明に、と等しいを表す“=”という記号を導入した。

1.4 Cubic and quartic equations 3 次、4 次の方程式

バブロニア人たちが、BC16 世紀までに、2 次の形と基本的同値で、2 次方程式を解していた。自然な質問は、似たような方式を用いて、3 次方程式が解けたかということだ。この答えが知られるまで三千年も費やしたのだ。16 世紀の数学者たちが、3 次のみならず 4 次の方程式まで“radicals”べき根を用いて成功したと言うのは、代数学における大事件だった。代数的方程式のベキ根による解法は、係数を用いた方程式の根を与える公式である。係数を用いた方程式に適用されるただ一つの許される演算は、四則演算（加法、減法、乗法、除法）と開ベキ（平方根、立方根、その他“根たち”）。例えば、2 次方程式
$x = (-b \pm \sqrt{b_2 - 4ac})/2a$ は、方程式 $ax_2 + bx + c = 0$ の根による解である。
3 次方程式のベキ根による解決策は、最初に 1545 年カルダーノによって『*The Great Art*』（ *原題ラテン語アルス・マグナ Artis Magnæ*）（代数学について述べている）が出版

された、けれどももっと早く del Ferro デルフェロと Tartaglia タルタリアにより発見されていた。タルタリアは、彼の方法をカルダーノに渡した。カルダーノはそれを発表しないと約束したのに、カルダーノはそれをすぐに出版した。それで、カルダーノの公式として呼ばれる。

$x^3 = ax + b$ という 3 次方程式の解は

$$x = \sqrt[3]{b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - (a/3)^3}} + \sqrt[3]{b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - (a/3)^3}}$$

規則に適っているいくつかのコメントを述べておこう：

(i) カルダーノは記号を全然使わなかった。従って、彼の「公式」は修辞的で半ページも使った。さらに、彼が解した方程式はすべて数（*文字でない*）の係数で持っていた。

(ii) 彼は、通常、3 次方程式の一つの根を見つけることでいつも満足した。実のところ、適切な選択が、関係する 3 乗根で作られるならば、3 次方程式のすべての 3 つの根が、彼の式から見つけられるものだけ決定できるだろう。

(iii) 負の数は時々彼の仕事に発見されるけれども、彼はそれらを“fictitious”（虚数）と呼んで、疑った。彼の考慮した 3 次方程式の係数および根は、正数（しかし、彼は無理数を認めた）だった。従って、彼は $x^3 = ax + b$ と $x^3 + ax = b$ を別個のものとして見て、それぞれの解法（アルクワーリズミーの二次方程式の分類と比較しなさい）を章で分けた。

(iv) 彼は、3 次方程式の解法手順に幾何学根拠を与えた。

４次方程式の多項式のベキ根による解法はカルダーノの後にすぐ続いた。キーアイデアは、４次方程式の解法を 3 次方程式のそれに還元することであった。

フェラーリは、そのような方程式を最初に解いて、そして彼の仕事はカルダーノの *The Great Art* に入っていた。 [1]、[7]、[10]、[12]を見なさい

そのような方程式がベキ根によって解される前に、3 次方程式と 4 次方程式の近似解を見つける方法がよく知られていたことは、指摘されるべきである。後者の解法は、厳密であるけれども、小さな実用的な価値をもっていた。しかしながら、イタリアルネッサンスの数学者たちのこれらの「非実用的な」アイデアの新しい潮流は、非常に重要で、2 章において考慮される。

1.5 The cubic and complex numbers　3 次方程式と複素数

数学者たちは数世紀もの間、負の平方根に関して、以下の見方にとらわれていた。正の数の正方形は負の数の平方と同様に、正であるがゆえに、負の数の平方根は存在しない － 実のところ、することができない －。16 世紀になって 3 次方程式のベキ根による解法を通じて、全てが変わった。

負の数の平方根は、カルダーノの公式（ページ 6 を見なさい）が 3 次方程式の解に使われ

た時、“自然に”生ずるのである。例えば、彼の公式に $x^3 = 9x + 2$ の方程式当てはめると、

$$x = \sqrt[3]{2/2 + \sqrt{(2/2)^2 - (9/3)^3}} + \sqrt[3]{2/2 - \sqrt{(2/2)^2 - (9/3)^3}}$$

$$= \sqrt[3]{1 + \sqrt{-26}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{-26}}$$

この解決で意味付けるものは何なのか？カルダーノが負の数を信じないので、彼は確かにそれらの平方根への興味を持っていなかった。従って、彼は彼の公式を $x^3 = 9x+2$ のような方程式には応用できないとみなした。過去の経験によって判断すると、これは理解できない考えではなかった。例えば、Pythagoreans ピタゴラス派にとって、面積 2 の正方形の辺は存在しなかった。（今日の言葉で言えば、方程式 $x^2 = 2$ が解けないとなる）。

これらすべては Bombelli によって変えられた。彼の重要な本 Algebra 代数学（1572）において、カルダーノの公式を、方程式 $x^3 = 15x + 4$ に当てはめて、

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$ を得た。

しかし、彼は解法を捨てることができなかった。というのは、$x = 4$ がこの方程式の根であるということを洞察によって、彼が記述したので。さらに、その他の 2 つの根 $\langle -2 \pm \sqrt{3} \rangle$ もまた実数である。ここには矛盾があった：3 次方程式 $x^3 = 15x + 4$ のすべての 3 つの根が実数ならば、公式は、それらに負の数の平方根を含むと得たのに、意味がない。

矛盾を解決するものはどうであったか？

Bombelli は、$a + \sqrt{-b}$（$b > 0$）の形で表される「意味のない」表現を処理するために実数の規則を採用し、その結果、 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$ と $+\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$ と見せて、それゆえに、$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$。ボンベリは「考えられない」と考えることによって「意味のない」に意味を与えていた、すなわち負の数の平方根は有意義な方法で操作して、重要な結果を得ることができます。 これは彼の立場においても非常に大胆な動きでした。 彼が言ったように：

> 多くの人の判断では、それは野蛮の考えでした。 そして私も長い間同じ意見を持っていた。 全体の問題は、真実というよりもむしろ詭弁にかかっているようでした。しかし、私は実際に具体的な事例でこれが事実であることを証明するまで非常に長い間探していました[11]。

Bombelli は複素数の「計算」を開発し、次のような規則を述べました。

$(+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1}) = -1$ および $(+\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = 1$、そして特定の複素数の加法と乗法を定義した。これが複素数の誕生でした。だが、誕生は正当性を必要としませんでした。というのは、次の 2 世紀の複素数は謎に包まれ、ほとんど理解されず、しばしば無視されました。幾何学的にのみ続く平面上の点としての 1831 年のガウスによる表現は、数論の真実の要素として受け入れられた。（このトピックについてのアーガンドとウェッセルの初期の研究は、数学者の間ではあまり知られていなかった。）[1]、[7]、[13]を参照。

方程式 $x^3 = 15x + 4$ は「既約 3 次方程式」の例であることに注意してください。

すなわち、有理数係数を持ち、有理数で既約であり、そのすべての根は実数です。 19 世紀

には、そのような3次方程式（カルダノのものでなく）のべき根によっていずれの解法も複素数が必要です。だから複素数は既約3次方程式のべき根による解法を見つけることは避けられない。それこの理由から、べき根による解法は 2 次方程式ではなく3次方程式の解と関連して生じた、それもしばしば誤って想定されるのだが。（2 次方程式 $x^2 + 1 = 0$ の解の非存在は何世紀にもわたって容易に受け入れられました。）