「A History of Abstract Algebra」勉強会…第 3 回

（p3-5）

1　History of Classical Algebra

1.3 Al-Khwarizmi *アルクワリズミ*

イスラムの数学者たちは 9 世紀から 15 世紀の間にかけて代数学上の重要な業績を達成しました。おそらく中でも最も際立っていたのは、Muhammad ibn- Musa al-Khwarizmi ムハマド イバムサ アルクワリズミであって、彼は 720 年頃から 850 年くらいまで生きたとされるが、“代数学におけるユークリッド”というように例えられる。というのは、*代数学*あるいは*代数的知識*、“代数学”（そういうものがその当時あったとして）に関して、それを体系化し、それを独立した研究分野として確立したからである。

彼はこの業績を彼の著書である al-jabr w al-muqabalah.（アルジャブル、アルムカーバラ）という本の中で達成した。“Al-jabr”（現在の“algebra”代数学に由来する）は、等式の負の項を他辺に動かすと、符号が正に変わることを意味している。*つまり移項のことを意味している。*また、“al-muqabalah”は方程式の両辺から同じ項は、消去できることを意味している。それらはもちろん方程式の解法の基本的手順である。Al-Khwarizmi(アルゴリズムの語源になった)は、その基本的手順を 2 次方程式の解法に応用していた。彼は 2 次方程式を 5 つのタイプを分類した。

⑴$ax^2=bx$、⑵$ax^2=b$、⑶$ax^2+bx=c$、⑷$ax^2+c=bx$、and ⑸$ax^2=bx+c$.

定数項を客体している。正の根と根がゼロのもの、＋－の根が対称的に出てくるものは－を取らないとしている。⑴は 1 次方程式に帰着する。⑵は最も基本的な 2 次方程式。⑶は 2 根の積が負で 2 根の和が正ですから正根と負根が一つずつ出る。正の 1 実根がでる。⑷2 根の和と積が正になっていますからこれは解を持たない可能性がある。 2 虚根の可能性がある。 2 実根を持つ場合 2 つの正根がありますから根を捨てることができないというので、理論的に最も難しいタイプ。

この分類化は、Al-Khwarizmi が負の係数とゼロを受け入れなかった故に、必要だった。彼はまた本質的に記号法を持っていなかったので、彼の問題と解法は、学問的な表現ではなくて会話調で表現された。例えば先にあげた 1 番目と 3 番目の方程式は、「平方たちが根たちに等しい」、（*平方たちとは x^2 の何倍か $3x^2$ とか、根たちとは x の何倍か $4x$ とか*）「平方たちと根たちは数に等しい」（未知数（*つまり x のこと*）を根と呼んだ）と表現される。*未知数のことを、根と言う言葉で最初に使ったのは、この Al-Khwarizmi を翻訳した人だけど、本当は方程式の解の意味で使ったのです。*

Al-Khwarizmi は、幾何学的ではあるが、解法の手順に証明を与えた。

次は、彼の解法と問題の一つの例である。

「正方形とその辺の 10 倍分だけ増加させられた時、39 となる解を求めなさい。」

(即ち solve $x^2 + 10x = 39$).

解：辺 roots の数（x の係数）を半分にしなさい。今日の例では、5 が得られる。それを今度は二乗する。結果は 25。39 に加えると 64 になる。64 となる正方形の辺、それは 8 を得る。その 8 から辺 roots の係数の半分即ち 5 を引く。残りは 3。これが、探していた正方形の辺である。
記号的に、この処方は次の通りである。
$\sqrt{[(1/2)\times 10]^\wedge 2+39)}$ —(1/2) ×10
ここに Al-Khwarizmi の証明がある。図 1 のように gnomon （グノーモン；平行四辺形から対角線上に頂点を持つ平行四辺形を取り除いた L 字形の図形）を作図し、1 辺が 5 となる正方形を加えて、図 2 の正方形になるように完成させなさい。正方形は長さ x+5 の辺をもつ。しかしそれは、$x_2+10x+5_2=39+25=64$. から長さ 8 となる。したがって x = 3.
今言ったことを全部まとめると、係数の 2 分の 1 を作ってそれを平方して 39 に加えて、その平方根をとって、それから 2 分の 1 を引く。ということを行なっている。

15,6 世紀の西ヨーロッパの数学者たちのいくつか貢献について、短く述べておきましょう。“abacists”アバシスト（“abacus”そろばんを語源）または“cos-sists”コシスト（ラテン語の“thing”ものを意味するで、未知として使われた“cosa,”を語源 ）として知られている彼らは、以前の表記法と手順のルールを拡張し、一般化した。
この類で大きな影響を与えた作品は、1494 年に印刷（印刷機が発明されたのは 1445 年）された最初の数学本の一つ Luca Pacioli’s Summa （ルカ・パチョーリのスムマ）である。例えば、“co”(cosa) を未知数として使用し、初めての 29 乗に対して、“p”(piu)をプラス、“m”(meno)をマイナスとして記号を導入している。さらに、平方根として Rx (radix) 、立方根として Rx.3 を使用した。1557 年 Robert Recorde （ロバートレコード）は、
“noe 2 thynges can be moare equalle.”の証明に、と等しいを表す“=”という記号を導入した。