「A History of Abstract Algebra」勉強会…第 4 回
（p5-7）
1　History of Classical Algebra
1.4 Cubic and quartic equations 3 次、4 次の方程式

バブロニア人たちが、BC16 世紀までに、2 次の形と基本的同値で、2 次方程式を解していた。自然な質問は、似たような方式を用いて、3 次方程式が解けたかということだ。この答えが知られるまで三千年も費やしたのだ。16 世紀の数学者たちが、3 次のみならず 4 次の方程式まで“radicals”べき根を用いて成功したと言うのは、代数学における大事件だった。代数的方程式のベキ根による解法は、係数を用いた方程式の根を与える公式である。係数を用いた方程式に適用されるただ一つの許される演算は、四則演算（加法、減法、乗法、除法）と開べキ（平方根、立方根、その他“根たち”）。例えば、 2 次方程式
$x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ は、方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の根による解である。
3 次方程式のベキ根による解決策は、最初に 1545 年カルダーノによって『*The Great Art*』（ *原題ラテン語アルス・マグナ Artis Magnæ*）（代数学について述べている）が出版された、けれどももっと早く del Ferro デルフェロと Tartaglia タルタリアにより発見されていた。タルタリアは、彼の方法をカルダーノに渡した。カルダーノはそれを発表しないと約束したのに、カルダーノはそれをすぐに出版した。それで、カルダーノの公式として呼ばれる。
$x^3 = ax + b$ という 3 次方程式の解は
$$x = \sqrt[3]{b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - (a/3)^3}} + \sqrt[3]{b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - (a/3)^3}}$$

規則に適っているいくつかのコメントを述べておこう：
(i) カルダーノは記号を全然使わなかった。従って、彼の「公式」は修辞的で半ページも使った。さらに、彼が解した方程式はすべて数 *(文字でない)* の係数で持っていた。
(ii) 彼は、通常、3 次方程式の一つの根を見つけることでいつも満足した。実のところ、 適切な選択が、関係する 3 乗根で作られるならば、 3 次方程式のすべての 3 つの根が、彼の式から見つけられるものだけ決定できるだろう。
(iii) 負の数は時々彼の仕事に発見されるけれども、彼はそれらを“fictitious”（虚数）と呼んで、疑った。彼の考慮した 3 次方程式の係数および根は、正数（しかし、彼は無理数を認めた）だった。従って、彼は $x^3 = ax + b$ と $x^3 + ax = b$ を別個のものとして見て、それぞれの解法（アルクワーリズミーの二次方程式の分類と比較しなさい）を章で分けた。
(iv) 彼は、3 次方程式の解法手順に幾何学根拠を与えた。

4 次方程式の多項式のベキ根による解法はカルダーノの後にすぐ続いた。キーアイデアは、4 次方程式の解法を 3 次方程式のそれに還元することであった。

フェラーリは、そのような方程式を最初に解いて、そして彼の仕事はカルダーノの *The Great Art* に入っていた。 [1]、[7]、[10]、[12]を見なさい
そのような方程式がベキ根によって解される前に、3 次方程式と 4 次方程式の近似解を見つける方法がよく知られていたことは、指摘されるべきである。後者の解法は、厳密であるけれども、小さな実用的な価値をもっていた。しかしながら、イタリアルネッサンスの数学者たちのこれらの「非実用的な」アイデアの新しい潮流は、非常に重要で、2 章において考慮される。