「A History of Abstract Algebra」勉強会…第 5 回

（p7-8）

1　History of Classical Algebra

1.5 The cubic and complex numbers　３次方程式と複素数

数学者たちは数世紀もの間、負の平方根に関して、以下の見方にとらわれていた。正の数の正方形は負の数の平方と同様に、正であるがゆえに、負の数の平方根は存在しない　－　実のところ、することができない　－。16 世紀になって３次方程式のベキ根による解法を通じて、全てが変わった。

　負の数の平方根は、カルダーノの公式（ページ 6 を見なさい）が３次方程式の解に使われた時、“自然に”生ずるのである。例えば、彼の公式に $x^3 = 9x + 2$ の方程式当てはめると、

$x = 3''\sqrt{2/2 + \sqrt{(2/2)^2 - (9/3)^3}} + 3''\sqrt{2/2 - \sqrt{(2/2)^2 - (9/3)^3}}$

　$= 3''\sqrt{1 + \sqrt{-26}} + 3''\sqrt{1 - \sqrt{-26}}$

この解決で意味付けるものは何なのか？カルダーノが負の数を信じないので、彼は確かにそれらの平方根への興味を持っていなかった。従って、彼は彼の公式を $x^3 = 9x+2$ のような方程式には応用できないとみなした。過去の経験によって判断すると、これは理解できない考えではなかった。例えば、Pythagoreans ピタゴラス派にとって、面積 2 の正方形の辺は存在しなかった。（今日の言葉で言えば、方程式 $x^2 = 2$ が解けないとなる）。

　これらすべては Bombelli によって変えられた。彼の重要な本 Algebra 代数学（1572）において、カルダーノの公式を、方程式 $x^3 = 15x + 4$ に当てはめて、

$x = 3''\sqrt{2+\sqrt{-121}} + 3''\sqrt{2 - \sqrt{-121}}$　を得た。

しかし、彼は解法を捨てることができなかった。というのは、x＝4 がこの方程式の根であるということを洞察によって、彼が記述したので。さらに、その他の 2 つの根〈$-2 \pm \sqrt{3}$〉もまた実数である。ここには矛盾があった：３次方程式 $x^3 = 15x + 4$ のすべての 3 つの根が実数ならば、公式は、それらに負の数の平方根を含むと得たのに、意味がない。

矛盾を解決するものはどうであったか？

Bombelli は、$a + \sqrt{-b}$（$b > 0$）の形で表される「意味のない」表現を処理するために実数の規則を採用し、その結果、 $3''\sqrt{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$　と　$+3''\sqrt{2 - \sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$ と見せて、それゆえに、$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$。ボンベリは「考えられない」と考えることによって「意味のない」に意味を与えていた、すなわち負の数の平方根は有意義な方法で操作して、重要な結果を得ることができます。 これは彼の立場においても非常に大胆な動きでした。 彼が言ったように：

　多くの人の判断では、それは野蛮の考えでした。 そして私も長い間同じ意見を持っていた。 全体の問題は、真実というよりもむしろ詭弁にかかっているようでした。しかし、私は実際に具体的な事例でこれが事実であることを証明するまで非常に長い間探してい

ました[11]。
Bombelli は複素数の「計算」を開発し、次のような規則を述べました。
$(+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1}) = -1$ および $(+\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = 1$、そして特定の複素数の加法と乗法を定義した。これが複素数の誕生でした。だが、誕生は正当性を必要としませんでした。というのは、次の 2 世紀の複素数は謎に包まれ、ほとんど理解されず、しばしば無視されました。幾何学的にのみ続く平面上の点としての 1831 年のガウスによる表現は、数論の真実の要素として受け入れられた。(このトピックについてのアーガンドとウェッセルの初期の研究は、数学者の間ではあまり知られていなかった。)[1]、[7]、[13]を参照。

方程式 $x^3 = 15x + 4$ は「既約 3 次方程式」の例であることに注意してください。
すなわち、有理数係数を持ち、有理数で既約であり、そのすべての根は実数です。 19 世紀には、そのような 3 次方程式(カルダノのものでなく)のべき根によっていずれの解法も複素数が必要です。だから複素数は既約 3 次方程式のべき根による解法を見つけることは避けられない。それこの理由から、べき根による解法は 2 次方程式ではなく 3 次方程式の解と関連して生じた、それもしばしば誤って想定されるのだが。(2 次方程式 $x^2 + 1 = 0$ の解の非存在は何世紀にもわたって容易に受け入れられました。)