「A History of Abstract Algebra」勉強会…第 6 回
（p 8 －10）

1　History of Classical Algebra

1.6 Algebraic notation: Viète and Descartes 代数的記号法　ビエタとデカルト

アルファベットで係数を表記するのは、中学 1 年生で勉強するんじゃないんですか、小学校では全くやらないんですね。代数的記号法を、小学生がどういう風に乗り切るのか、非常に興味あるところです。
Viète ビエタというのがラテン名でフランス語だとヴィエト、Descartes デカルト著名人です。二人ともフランス人なのですが、当時どういう風な宗教に属していたかで、読み方結構違うんですよね。ルネ・デカルトは、ラテン名を好んでたんですね。ビエタとは、フランス名を通称として使われることを好んでいた。その二つの間には当然政治的な位置関係がある。デカルトは権力にすり寄っていたしょうもない男なんですよ。そういうデカルトをうまく使ったのが政治思想家のヴォルテールで、革命の英雄になっている。デカルトは英雄にはなれなかったが、ヴォルテールはちゃんとパンテノンに埋葬されています。

数学における記号法は今や一般的である。事実、記号表記の発達なしの数学はありえないだろう。３千年もの間、記号なしに代数学が発展してきたというのは注目すべきことです。代数学に対しての記号表記の導入と完成は、16 世紀と 17 世紀初めに主にビエタとデカルトによってなされた。
　その決定的な第一歩は、ビエタによって書かれた「Introduction to the Analytic Art」（解析法入門）の中にある。ビエタは、それまでの「method of synthesis」（統合の法則）と対比されるように、問題を解決するための発見の法則というギリシャの「method of analysis」（解析術）に新しい命を吹き込んだ。

ギリシャの「method of analysis」（解析術）、ギリシャにおいても解析術はあったということで、それは、問題の解法を発見できたとしてその解法はどのような性質を持っているかということを method of analysis と言って、パッポスなんかがしきりと研究したものですね。
*　定理を証明するというのは、シナゴゲと言って、シナゴゲというのは総合ということで、それと正反対のものをアナリキケ、*分析と言った。伝統的な機関の中では、シナゴケだけが大事にされてきたのだが、パッポスなんかはそれをひっくり返した。
「method of synthesis」は、シナゴゲに相当するもので、総合の方法というもので、「method of analysis」は、分析の方法、それをギリシャ語ではアナリキケと言った。アナリキケとシナゴゲはギリシャにおいては区別されていたが、だんだんはっきりしなくなった。典型的なのが中学校の数学で、答案書くときに、総合とか分析という言葉は一切なく、

証明というだけで、何書いていいのか分からない。シナゴゲというのは、答えがあるとすれば、こうでなくてはならない、という理論をいう。それに対して答えがまさにそうであるということを分析的に論ずるのを、解析と言う。昔は幾何の答案というのは、総合、解析、証明、吟味という４つの文を頑張っていた、小平先生の時代は。今はそれらがぐちゃぐちゃになって、先生たちと子供達も分からないまま、いい加減にやっている。少なくとも、総合と解析・分析と、二つの部分が分かれたということがすごく大事なところ。

分析ということは、やってもいい、やらなくてもいいという程度のものだったのに、それに対して不可欠な新しい命を吹き込んだ。ビエタが著書の中で、「アナリキケム」という言葉を使った。この著者はなぜビエタが「アナリキケム」という言葉を使ったかという謎に迫っている。古代の人々の解析と呼んでいたもの、パッポスなんかは典型なのだが、作図問題で、「そういう作図をせよ」という問題に「こうこうこうだから、作図できます」というのが総合であるのに対して、「こういう作図ができたとすればその作図はこういう性質を満足しなければならない」というように、作図の満たすべき性質を分析するっていうのはアナリシスだったわけです。

アナリシスのいうのは総合に比べて、一段低い位置にあった訳ですが、近世に実はそのアナリシスにこそ命があると、アナリシスと総合の地位の逆転が起こるわけです。これが数学史の歴史の中で最も重要な事です。10代の数学、今の高校生か中学生あたりは、どっちかというと証明の学としての数学で、退屈ですよね。証明は自分がみつける時はいいけど、人が証明したものは退屈で極まりない。

ビエタは、代数的にフォーミュレイト（系統立てる）方法を識別した。彼は、その方法を「正しい発見の学としての数学」としてみなしたので、「いかなる問題も未解決のまま、残さない」という大きなビジョンを持った。

代数的にフォーミュレイト（系統立てる）された途端に、問題は全てこれで溶けるのだと、考えた。

ビエタの基本的なアイデアは、任意の係数（パラメータ）を方程式に導入し、そしてこれらを方程式の未知数（変数）と区別することであった。彼は子音(B, C, D, . . .) を定数とし、母音(A, E, I, . . .)を変数とした。

もっとわかりやすく言えば未知数を文字とした。パラメータというのは日本で誤解されていますが、要するにただの定数のことです。方程式に変数って使うのは正しくないですよね。よく中学校数学でその混同が行われているのですが。variables と書いていますが、未知数と

訳す方がいいですね。この著者の弱点は、unknown と言う言葉と variables とを区別しないところで、原著者の間違いです。
定数と未知数とを区別するということ、これは非常に大事なことで、未知数と区別されたパラメータ、既知の定数ということですね、が導入された。定数があるけれどなんだかわからない、これを導入したのはすごいことです。

このように二次方程式は以下のように表されます。$BA_2 + CA + D = 0$ （しかしこれは正確にはビエタが書いたそのものではない。下記を参照）。

特に既知数を文字に表したことがすごく大事ですよね。$3x_2$ とか $2x_2$ としていたのが Bx_2 とするようになったのは偉大な発展ですよね。

私たちの目には、これは単純で、自然なアイディアに見えるが、それは、歴史上初めて、３千年も超えて一般的な二次方程式、すなわち、特殊な数値係数とは限らない全く任意の文字係数がかかっている方程式を述べることができたという、代数学における本源的な出発点であった。

今の子供たちは、$3x_2+2x+1$ というふうに、ax_2+bx+c から戻ってしまっている。それではビエタの偉大さに気づかない。しかし、ビエタの場合はまだ同次の規則は残っていたわけで、中途半端だった。

これは中途半端な貢献だった。というのは、彼は、代数学を特殊な研究から一般的なものへ、数係数を持つ方程式から文字係数を持つ一般的な方程式へと改良した。彼は、文字係数を持つ多項式へと、体系的に移行するということに踏み出した。例えば、彼は５次以下の代数方程式の根や係数の関係を公式化した。代数は、今はかなり抽象的になり、さらに記号的な科学として、前進しつつあった。

ビエタの仕事を詳細化したことは、さらに代数学における使用よりもより広い分野にも広がった。彼は記号的な科学を創り出した、それは広く応用が利くもので結果を発見し、証明することどちらにも当てはまるものだった。（例えば比べてみなさい。カルダノの３ページにわたる３次方程式の解の公式は、現代の記号的証明では半ページしかない。記号を用いないで、多項式の根と係数の関係を見つけることを試みてください）。ビエタのアイディアは、17 世紀における解析幾何、微積分学、数理科学の決定的な展開に欠くことのできないことを証明した。

今はデカルト、ビエタというふうに、横並びで書いてる本が多いんですけど、ビエタの業績というのは、ものすごく大きい。それを多くの人が全然知らないのはちょっと情けない。ビ

エタの仕事の中でとにかく偉大なのは知られた方程式の解法であっても、既知数を文字で表すって言うことによって代数的なプロシージャーを一般的に表現したって言う事ですね。そのことは人類史上の革命であると言っても良い位の革命だったと思うんですが、今の中学生とか高校生は文字を使うのがわからないと言いますが、要するにビエタ以前の世界像の中に生きている人たちなのです。だからその子たちに、実は近代が切り開いた地平がどういうものかっていうのを教えてやることができればいいなって思うのです。文字の使い方わかんないって言う人結構いますよね。

しかし、ビエタの仕事は、完全な記号代数学の公式化では最後の言葉ではなかった。以下は、その欠点のうちのいくつかであった：

（ｉ）彼の表記法は、「短縮」だった。（すなわち、部分的に記号であるだけ）。
例えば方程式 $x_3+3B_2x=2C_3$ はビエタによると
A cubus + B plano 3 in A aequari C solido 2 (ここで A を x に置換).

ABC を使っているが、短縮されているだけで便利になってない。

（ii）ビエタは、代数表記において、全ての項は同一次数を持たなければならないと“同次性”を要求した。上の２次方程式が、まるで私たちの通常のやり方とは違って、全ての項が２次ではなくて３次で書かれているのが、理由である。

同次性の制限は、幾何学が絶大に支配していたであった古代ギリシャからあった。これは当たり前で長さと体積を足すとか、長さから面積を引くとかありえないですから。

古代ギリシャ流の考え方では、積 ab は辺 a と b を持つ長方形の面積を示し、同様に abc は立方体の体積を示した。ab+c のような表現は、長さと面積を加えることはできないから意味を持たなかった。これらの考え方は、２千年もの間、数学活動の中核をなしていた。

ギリシャではユークリッドの時代はそもそも長さとか面積とか、体積という言葉はなかった。三平方の定理にしても、直角三角形の上に作られた正方形たちは斜辺の上の正方形に等しいと言っている。重ね合せることができるということを証明しただけですから。

（iii）ギリシャの伝統的な側面が、実は*（アラビア）*アルクワリズミーと*（初期イタリア）*カルダーノの仕事の場合も同様に、代数的解は幾何学的証明であった。ビエタといえども例外ではなかった。
（iv）　ビエタは方程式の根を正の実数に限定した。これは彼の幾何学の好みから理解できる、なぜならその時負または複素数のための幾何学的表現がなかったから。

これらの欠点のほとんどは、デカルトの重要な本 ***The Geometry***(1637)（*これこそ幾何学*）により克服された。彼はその本で解析幾何学の基本的な要素を説明した。

デカルトの表記は完璧に記号だらけだった。*説明がなく式だけしかなかった。*それは本質的に言えば現代的な記号（つまり我々の記号はデカルト流であると言うことがより適切である)。例えば、彼は、変数として x,y,z…を、定数（パラメータ）として a,b,c を使った。最も重要なこと、"線分の代数学"を導入したことである。

すなわち a と b の 2 つの線分が作る、和 a+b、差 a-b、積 a×b、および商 a/b.も、線分であると作図した。

> *線分同士の和もまた線分で、線分同士の積もまた線分であるという、これは有名な話で、デカルトは 1 を考えた。a と b の線分を考えた時、相似を使って a と b の掛け算も線分だと説明した。これは量の同次性と言われる時代の革命だった。相似性を使えば負の数もルートも説明できる。*

もはや代数的な数式の同次性は必要ではなかった。

例えばab＋c は、今や線分と言われる合法な表現である。このアイデアは最も重要な達成、それは代数学における幾何学の必要性を除去したということを表現している。

２千年の間、幾何学は、数学の言語としてかなりの位置を占めてきた；今や代数学がこの役割を果たし始めた。参照せよ [1], [7], [10], [12], [17].