「A History of Abstract Algebra」勉強会…第 7 回
(p10-12)

1　History of Classical Algebra

1.7 The theory of equations and the Fundamental Theorem of Algebra

方程式の理論と代数学の基本定理

ビエタとデカルトの研究は、16 世紀の終わりから 17 世紀の始めころ、数値方程式の可解性から文字係数を持つ方程式の理論的な研究へと関心の的が移った。多項式の理論が出現し始めた。その主たる関心は、そのような文字係数を持つ方程式の根の存在、本質、そして個数決定することだった。特に

（ｉ）すべての多項式が一つの根を持つか、もしそうならば、それはどんな種類の根であるか？これはこの主題においてすべての質問の中で、最も重要で難しいものだった。質問の最初の部分の方が、2 番目よりずっと答えやすいことがわかった。

The *Fundamental Theorem of Algebra*（FTA）代数学の基本定理は両方に答えた：すべての実数または複素数の係数を持つ代数方程式は、複素数の根を持っている。

（ii）代数方程式はいくつの根を持っているか？デカルトは彼の *Geometry*（幾何学）の中で、

the *Factor Theorem*（ファクター原理；因数定理）を証明した。α が多項式 p（x）の根ならば、x－α は因数、すなわち p（x）＝（x－α）q（x）となる。この時 q（x）は p（x）より 1 つ次数が低い多項式である 。このプロセス（形式的に、帰納法を使う）を繰り返すと、それは n 次の多項式は、ぴったり n 個の根を持つ。もし一つの根を持つならば、それは FTA によって保証されている根である。n 個の根は異なっている必要はない。

この結果の意味は、もし p（x）が n 次ならば、p（x）=$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$という n 個の数 $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$が存在する。その FTA は α_iが複素数であることを証明している。

（注意しなさい；多項式 p（x）の根αと、代数方程式 p（x）＝ 0 の根αと区別しないことを。両方とも p（α）＝ 0）

(iii)いつ、根が有理数、実数、複素数、正の数であると、決定できるのか？実数の係数を持つ奇数次のすべて多項式は、実数の根を持っている。これは 17 世紀と 18 世紀の直観的な場受け入れられ、形式的に 19 世紀に、微積分における the Intermediate Value Theorem（中間値の定理）の容易な結果として確立した。中間値の定理では（ここで必要なバージョンにおいて）、x のある値に対しては正であり、その他には負を持つ連続関数 f（x）は、ある x_0 に対して 0 でなければならないということを、述べている。

　ニュートンは、多項式（もしあれば）の複素数の根が共役の対に出現することを示した：もし a + bi が p（x）の根であるならば、a - bi がある。デカルトは、整数の係数を持つ多項式 p（x）のすべての有理数の根（もしあれば）を見つけるためのアルゴリズムを与えた。次の通り。p（x）=$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$とする。もし a/b が、有理数の p（x）

の根 ならば、その時 a および b は互いに素である、そして a は a_0 の約数であり、b は a_n の約数；a_0 と a_n が有限個の多くの約数を持つので、この結果が、段階の有限の数において p（x）のすべての有理数の根を決定する。（注；a 割る a0 と b 割る an に対して、いつも a/b が p（x）の有理数の根であるわけではない）。彼はまた、*Descartes'Rule of Signs*（デカルトの記号の規則）として知られるようになることを述べた（証明なしで）。：多項式 p（x）の正の根の数はその係数の記号の変化（「+」から「−」または「−」から「+」）の数を越えていない。負の根の数は、せいぜい 2 つの「+」記号または 2 つの「−」記号が連続において見つけられる時の数である。
（ⅳ）多項式の根と係数の間の関係は何であるか？長い間 α_1 と α_2 が、二次方程式 p（x）$=ax^2+bx+c$、の根であるならば、 $\alpha_1+\alpha_2=-b/a$、および $\alpha_1\alpha_2=c/a$ であると、知られていた。
ビエタはこの結果を、多項式の根のある和と積をその係数の用語で表す公式を与えることによって、5 次までの多項式に拡張した。ニュートンは、任意の次数の多項式に対してこの型の一般解を確立し、従って、多項式の根の *symmetric functions*（対称式）の重要な表記を導入した。
(v) どのように、多項式の根を見つけるのか？最も望ましい方法は、根についての正確な式、できればベキ根（ページ 6 の定義を見なさい）による解法を決定することである。そのような式が 4 次までの多項式で利用可能であり、より高い次元の多項式にその結果を拡張しようと試みていたことを、知っている。（2 章を見なさい）。根についての正確な式の不在において、あらゆる求められる精密な次元にでも近似解を見つけるために、様々な方法が開発された。特に 17 世紀後半と 19 世紀前半のニュートンとホーナーの方法が最も突出していた。前者は微積分の使用を必然としていた。ここに FTA（代数学の基本定理）のいくつかの同等の説明がある。
以下を含む：
（ⅰ）複素数の係数を持つすべての多項式は、少なくとも一つの複素数の根を持っている。
（ⅱ）実数の係数を持つすべての多項式は、少なくとも一つの複素数の根を持っている。
（ⅲ）実数の係数を持つすべての多項式は、複素数の係数を持つ 1 次方程式の積の分解として書くことができる。
（ⅳ） 実数の係数を持つすべての多項式は、1 次と 2 次方程式の積の分解として書くことができる。

FTA（代数学の基本定理）の命題（代数学が成り立つということを主張した）は、と言っても証明ではないが、17 世紀の早い時期に Girard ジローと Descartes デカルトによって与えられた。けれども、それらは上記ⅰからⅳのどれと比べても精密であるとは到底言えないものだった。例えば、デカルトは定理を次の通り形式化した：“すべての方程式は、その方程

式に含まれる未知数の次数と同じ数だけ、多くの異なる根を持つことができる。”　デカルトが“持つことができる”と言ったのは、彼は複素数を使うことに不安を感じていたことを考えるならば理解できる。

n 次方程式は n 個の根を持つ、と FTA では言っているのに、“持ちうる”とあえて言ったのは、n 個以下、すなわち重根を考えたからではないか、と著者は述べているが、むしろ私は、虚根のことを考えていたのではないかと思う。

FTA は 17 世紀後半の微積分法において重要であった。というのは、数学者たちに、それらの分母を 1 次または 2 次の因数で因数分解することによって、有理関数の積分を見つけることを可能ならしめたから。しかし、この定理を使うのにどんな担保があったか？ほとんどの数学者たちは結果を正しいと思っていたけれども、ゴットフリートライプニッツだけはそうではなかった。例えば、1702 年の論文において、$x^4 + a^4$ は 1 次及び 2 次の因数に因数分解できないと、主張した。

これは実は間違っていて、因数分解できるんですね。「2 乗ひく 2 乗」は和と差の積に因数分解できる。

$$x^4 + a^4 + 2a^2x^2 - 2a^2x^2 = (x^2+a^2)^2 - 2a^2x^2$$
$$= (x^2+a^2)^2 - (\sqrt{2}ax)^2 = (x^2+a^2+\sqrt{2}ax)(x^2+a^2-\sqrt{2}ax)$$

FTA の最初の証明は、1746 年にダランベールから与えられたが、すぐオイラーによる証明が続いた。ダランベールの証明は解析学（FTA は代数学における定理だったことを思い出せ ）からアイデアを用いていたが、オイラーはほとんど代数学的であった。二つの証明は両方とも、特に、すべての n 次方程式が、実数の法則に従って計算することができる n 個の根を持つということを仮定している点で、不完全であり厳密さに欠けていた。

実数での証明だったけれどもあたかも根たちが複素数であると勘違いをしていた。

ガウスは、1797 年（彼がほんの 20 歳であった時）に完成し、1799 年に出版した博士論文の中で、当時の標準では十分厳密な FTA の証明を与えた。現代の見方からすれば、ガウスの証明は、幾何学と解析学のアイデアに基礎を置いているものであり、論理的飛躍もあった。ガウスは、さらに 3 回の証明（第 2 証明と第 3 証明は、幾何学・解析学ではなく本質的な代数学であった）を与えた。最後は 1849 年だった。

FTA の多くの証明は 2000 年代までずっといくつも与えられてきた。それらのうちのいくつかは、代数学的で他は解析学的で、さらに位相幾何的（トポロジー）であった。これは理由がある。というのは、複素数係数を持つ多項式は、同時に代数的対象でもあるし、解析的対象でもあり、位相幾何的の対象でもあるから。それは FTA の純粋に代数学的証明は存在しないという多少逆説的である。

代数学の基本定理と言いながら、その証明に代数学のみでなく、解析学やトポロジーを用いたから。

“実数体上（実係数）の奇数次の多項式は実数の根を持つ”という解析的な結果は、すべての

代数学的証明においても、避けることができないということがわかった。

19 世紀の始め、FTA は相対的に新しいタイプの定理、*existence theorem*(存在定理）になった。すなわち、ある数学的な対象－多項式の根－は、単に理論上だけで、存在することが示された。根に対していかなる構成法も与えられなかった。非構成的な存在定理は 19 世紀と 20 世紀の始めにおいてとても論争になった。
数学者の中には今日に至るまでもそれらを拒絶する人がいる。

直感主義論者と言って、背理法を否定する。彼らは、π を 10 進展開していった時に、例えば、9 が 90 個続くという箇所がどこかに出てくるとする、これは真か擬か、という命題に対してわからないものを命題にするのはナンセンスだと主張する。今は少数派。

この章の様々な局面のために参照せよ [1]、[3]、[4]、[5]、[10]、[15]、[17]