

1 History of Classical Algebra

1.8 Symbolical algebra 記号代数学

多項式の解法の研究は、必然的に様々な数の集合の本性ないし諸々の属性の研究へと導く。というのはもちろん解それ自身も数である。従って（私達が言及したように）、数の集合の研究は、古典的な代数学の重要な一側面を構成している。

負の数と複素数、18世紀（FTAはそれらを不可避にした）において頻繁に使われるけれども、しばしば、不適なもののみならず、ほとんど理解されなかった。例えば、ニュートンは負の数を、「無より小さい」量と説明し、ライプニッツは、複素数を“存在と不存在の間の両生類”であると言った。オイラーの主張は以下の通り：“+の記号がついていたら正の量、-の記号がついていたら負の量、と呼ぶ”

$(-1)(-1) = 1$ のような負の数の取り扱い規則は、古代から知られていた。けれども過去にはいかなる証明も与えられなかった。（オイラーは $(-a)(-b)$ が ab と等しいにちがいないと主張した。それは $-ab$ になり得ないから。 $-ab$ は $(-a)b$ と「示された」から。）18世紀の後半と19世紀始めの間に、数学者たちは、なぜそのような規則が成り立つのかということに疑問を持ち始めた。ケンブリッジ大学の解析協会のメンバーがこの問題に重要な進歩を与えた。ケンブリッジの数学は、教養教育の一つとしての数学があり、若い頭脳の論理的な訓練として用いられるべき絶対真理の規範としてみなされた。

ケンブリッジではギリシャ時代からの古典的な幾何学が絶対だった。でも数学を学ぶ優秀な学生たちは大陸では解析学の数学があるということを知り、旧態然としたケンブリッジの数学教育に対抗して解析協会を作った。まさに全共闘ですよ。当時ケンブリッジでは数学は絶対真理、神学と並ぶものだった。アメリカもそうだった。日本はラッキーなことに明治政府がスコットランドに留学させたので、新しい数学を学ぶことができた。ニュートンはケンブリッジだが、ニュートンがいたのにケンブリッジでは解析学を教えていなかった。

それゆえに解析協会の数学者たちは、代数学をとりわけ負の数についての演算の法則を、確固たる基礎の上に基礎付けるということが重要である、と感じていた。

この話題についての最も包括的な仕事は、1830年のピーコック（解析協会のリーダー）の *Treatise of Algebra*（代数学論）であった。彼の主要なアイデアは、“算術的代数学”と“記号代数学”を区別していることであった。前者は、正の数だけを表した記号の演算に関して述べている。だからピーコックの見方において、証明は全く必要ではなかった。例えば、 $a - (b - c) = a - b + c$ は、 $b > c, a > b - c$ の時、算術的代数学の法則があって成り立つのは決まっている。いかなる制限も a, b, c に置かれないならば、それは記号代数学の法則になる。事実、記号のいかなる解釈も a, b, c に対して要求されない。従って、記号代数学

は、具体的に表す必要がない記号、けれどもそれは算術的代数学の法則に従うものだが、その記号演算の主題を新しく打ち立てた。

a, b, c は、数を表しているのではなくて抽象で構わないと言っている。この考えが、中学で身につけるべき最も重要な考えであると思う。高校でも文字として扱っている意識がない。例えば虚数の計算で i がつくものがありますね。 i という文字を抽象的に計算しているだけで、 i とは何かということは置いていて、計算している。虚数は存在しないと、数学者は虚しいことをやっている、思われている。 i は 2 乗すれば -1 となる数と形而上的なことを言ってるが、 i は文字なんだと思えばなんでもない話です。 $i \times i$ が出てきたら -1 に置き換えるという規則があるだけの話。ゼロより小さい数があると考えると哲学的な瞑想の世界になってしまうが、 $-$ を記号として考えればなんでもない。このように数学はある種の飛躍が必要なんです、時々世の中に飛躍が困難な人がいる。

これが、ピーコックをして、代数学の様々な規則を形式的に確立することを可能ならしめた。例えば、 $(-a)(-b)$ は、次の通り ab と同等であることが示された。

$(a-b)(c-d) = ac + bd - ad - bc$ (**) が、 $a > b$ と $c > d$ の時には算術的代数学の法則であるから、それは、 a, b, c, d でいかなる制限も持たないような記号代数学の法則にもなる。 $a = 0, c = 0$ (**) と仮定すると、 $(-b)(-d) = bd$ となる。

ピーコックは、記号代数学の法則の彼の識別を、the Principle of Permanence of Equivalent Forms(等値形式の恒久普遍原理)によって記号代数学の法則と算術的代数学の法則の同一視を正当化することを試みた。それ(等値形式の恒久普遍原理)は、本質的に記号代数学の法則が算術的代数学の法則になると言っていることだ。(算術代数の法則と言われたものは、その時代にははっきりと明示されていなかった。それらが 19 世紀の後半、環と体の公理に入れられた時に明確化された。)

このアイデアは、公理という言葉を用いたトピックへの現代的アプローチとあまり違ってはいない。その意義は、詳細においてというわけではなく、より広いものの見方という点において、代数学の本質において、記号の意味の焦点から演算の法則についての強調へ移行の始まりのシグナルとなっている点にある。

昔は代数学といえば文字は何を表しているのか、そういう問題意識だった。文字は何を表しているのかどうでもいい、演算法則が問題なのだ。それが現代数学なのだ。それまでは整数とか有理数とか実数とか自然数とかそういう個別の数について考えていた。大学の抽象代数になった途端に、ある集合があってその集合において、2種類の演算が定義されていて次の演算方式が成り立つか、演算法則が大事であって文字は何を表しているか関係ない。これは言ってみれば、りんごとかオレンジとか一個ずつの絵を描いていたのに対し、それを抽象化して例えば静物として、りんごとかオレンジではなく、静物そのものを描こうとした時に 20 世紀の画家たちの絵になるのだと思います。

ピーコックの記号代数学の叙述を見てください。

記号代数学において、規則は演算の意味を決定する。..

私達はそれらの規則を、記号の科学や記号の結合に対して任意に仮定される限り、任意な仮定と呼ぶことができる。一貫している規則のどのような他の仮定された体系（集合）にでも適応する。[13]

これは、かなり時代に先んじた考えを持って、非常に洗練されたアイデアであった。しかしピーコックは、法則が任意性を持っているということに対して口先だけだった。実際には、私達が見てきたように、それらは算術の法則にとどまっていた。次の数十年に、イギリス数学者たちが、ピーコックが予言したことを、通常の算術の法則とは何通りもの仕方で異なっている性質を持った代数（多元環）を導入することによって、実際に具体化した。

ブルバキの言葉において：

イギリスの学校の代数学者たちは、まず始めに、830年から1850年の間、結合法則の概念を導入し、それからこの結合法則の概念を新しい数学的諸対象に応用することによって、代数学の研究領域を直ちに拡大した。：ブールによる論理代数、ハミルトンによるベクトル、四元数（虚数単位が3個 i, j, k ）、一般の超複素数（虚数単位が7個）、ケーリーによる行列、非結合法則。

そのように制限があつての、記号代数学は、代数学における次なる発展のために、良い環境を提供した。記号、そして記号の演算法則はそれ自身で立つ命を持ち始め、数の間の諸々の関係を表現するための言語というよりはそれ自身の権利を持って研究の対象となった。

この発展を続く章においてみてみよう。