2019/4/24「A History of Abstract Algebra」勉強会…第 9 回
(p17-19)

2 History of Group Theory

この章では、群論の入門編で議論された主な概念の起源、定理、および一般的な理論について概説します。これらには、たとえば、(抽象) 群、正規部分群、商群、単純群、自由群、同型写像 isomorphism、準同型写像 homomorphism、自己同型 automorphism、組成列 composition series、直積;そのラグランジュ、コーシー、ケイリー、ヨルダン–ヘルダーの定理;順列の理論群およびアーベル群という概念が含まれます。これらの問題を扱う前に、全体としての数学の中での文脈について言及したいと思います、そして特に代数学の中での文脈にもついて言及したいと思います、何故ならば群論はその代数学の中で発展したのだから。群論の進化に関する「物語ストーリー」は 1770 年に始まり、20 世紀に拡大したが、主要な発展は 19 世紀に起こりました。群理論の進化に関係していたその世紀の一般的な数学的特徴のいくつかは、次のとおりです。(a) 厳密さに対する関心の高まり; (b) 抽象化の出現; (c) 公理的手法の復活; (d) 人間の活動としての数学の見方、つまり物理的状況を参照せず、または物理的状況からの動機なしで可能になった。18 世紀の終わりころまで、代数学は大部分を多項式の解法の研究に費やした。 20 世紀になって代数学は抽象的で公理体系の研究になりました。いわゆる多項式の古典代数からいわゆる公理系の現代代数への移行は 19 世紀に発生しました。群論に加えて、可換環、体、非可換環、ベクトル空間という代数的構造が現れた。これらは、群論と一緒に、時にはそれと助け合って発展しました。ガロア理論とは、まさに群論と体理論の両方が含まれてる。代数的整数論は群論の諸要素に加えて可換環と体理論を含むものであった。群表現理論は、群論、非可換環、および線形代数の混ぜこぜであった。

2.1 Sources of group theory　群論の源

群論の進化には 4 つの主要な源がある。それらは次の通り (創始者の名前と起源の日付):
(a) 古典代数 (ラグランジュ、1770)
(b) 数論 Number theory (Gauss, 1801)
(c) 幾何 Geometry (クライン Klein, 1874)
(d) 解析 Analysis (Lie, 1874; ポワンカレ Poincaré and Klein, 1876)
それぞれ順番に扱っていきましょう。

2.1.1 Classical Algebra

ラグランジュが主要な論文「代数方程式の解に関する省察」に書いた所の当時 (1770 年) の代数学の主な問題は、多項式に関するものだった。 そこには根の存在と本質を扱う“理論的な”問題がありました。たとえば、どの方程式でも根を持つか?根はいくつあるか? それらは実数、複素数、正か、負か?そして、根を見つけるための方法を扱う“実用的な”問題があった。 後者の具体例で言えば、厳密な方法と近似的な方法があった。 以下では、厳密な

方法について説明します。

バビロニア人は2次方程式を解く方法を知っていました。紀元前1600年頃、正方形を完成させる方法（グノーモンの形：(第1章を参照）で。3次方程式および4次方程式を解く代数的方法は、1540年頃に与えられました（第1章)。続く200年間において、主な問題の一つは5次方程式の代数的解法だった。これは、1770 年の論文でラグランジュが自ら設定した課題です。この論文では、ラグランジュは、3次方程式および4次方程式を解くためにビエタ、デカルト、オイラー、およびベズーによって考案されたさまざまな既知の方法をまず検討した。 彼は、これらの方法の共通の側面は、そのような方程式を補助方程式へと還元するである-いわゆるリゾルベント（解法）方程式であると、示した。 後者は元の方程式より1つ次数が低い。

ラグランジュは次に任意の n 次多項式についても同様の分析を試みました。そのようなn次方程式に、彼は次のようにリゾルベント方程式を結びつけようとした。

f（x）を元の方程式、根n個 $x_1,x_2,x_3,\ ...\ ,x_n$ を持つ。f（x）のn個の根と係数を持つ有理関数R（$x_1,x_2,x_3,\ ...\ ,x_n$）を取り上げる。（これをするためのラグランジュの説明）

$x_1,x_2,x_3,\ ...\ ,x_n$.の n 個の根の置換は n！通りある。n！個すべてを置換した時に、この有理関数R($x_1,x_2,x_3,\ ...\ ,x_n$)が取りうる異なる値を全部考えてください。もしこれらは $y_1,y_2,y_3,\cdots y_k$ によっておくとすれば、リゾルベント方程式はg（x）=（x − y_1)（x − y_2）…（x ー y_k）となる。

g（x）の係数は $x_1,x_2,x_3,\ ...\ ,x_n$ の対称式であることに注意することが重要です。したがって、それらはx $x_1,x_2,x_3,\ ...\ ,x_n$ の基本対称式の多項式です;つまり、元の方程式f（x）の係数の多項式です。ラグランジュは、kがn！を分割すること（kはn！の約数）を示しました。ー 群論におけるラグランジュの定理と言う源。(*G を有限群とし、H を G の部分群とする。このとき部分群 H の位数は群 G の位数を割り切る）*

たとえば、f（x）が根 x_1、x_2、x_3、x_4 を持つ4次方程式であるならば、R（x_1、x_2、x_3、x_4）は $x_1x_2 + x_3x_4$ と取ることができ、この関数は x_1、x_2、x_3、x_4 の24個の置換のもとで異なる値は3個しかとらない。したがって、4 次方程式のレゾルベント方程式は3次方程式になる。しかしながら、この分析を5次方程式に実行して、ラグランジュは、リゾルベント方程式が6次になることを見出した。

ラグランジュは 5 次方程式の代数的解法という問題の解決には成功しなかったが、彼の仕事は方程式研究における一里塚でした。多項式の解とその根たちの置換の間で結合が作られた最初だった。 実際、方程式の根たちの置換の研究は。代数方程式におけるラグランジュ一般理論の礎となった。この置換の研究は、彼が頭の中で考え、“方程式の解の真の原理”を形成した。もちろん、彼はこの点においてガロアによって立証されました。ラグランジュは置換の基本理論「計算」(例えば、その合成や閉性の考察がない）を考慮せずに置換について述べましたが。群論の萌芽が、置換群の形で、彼の研究の中に明確に登場していると言うことは言いうるであろう。 詳細については、[12]、[16]、[19]、[25]、[33]を参照してください。