

2.2.3 Transformation Groups 変換群

数論の場合と同様に、幾何学や解析学においてもそうであったけれども、群論的なアイデアが 19 世紀 60 年代まで暗示的のままだった。さらにクラインの（そしてリーの）幾何学における群の明示的な使用は、群論の発展に技術的にというよりも概念的に影響した。それは群論の発展において、置換群に夢中になっていることから変換群の研究へ、真正なる移行を意味していた。（それは、もちろん、もはや置換群が研究されなかったことを示唆するものではない。）それが有限群から無限群へ転換点であったことで、この変遷はまた注目に値する。

クラインは自分の仕事と置換群の研究の関係に注目したけれども、彼がなそうとしていた新しい門出も認識していた。クラインは、ガロアの理論および彼自身の理論が共通に持っているものは、“変化の群”の研究であると述べたが、次のことをつけ加えた、“確かに、変化があてはまる対象は決定的に異なる。：[ガロア理論]では有限個の離散要素を扱うのに対して、もう一方（クラインの理論）では連続的な無限の要素からなる多様体を扱う、という点で。” 類比を続けるために、クラインは次のことを注意した、置換群の理論が存在するとまさに同じように、“私達は、変換の理論、すなわち与えられたタイプの変換によって生成されるところの群の研究を強く主張する”

クラインは、群論における抽象的な視点を避けていた、現代から見ても実際のところ、彼の（変換）群の技術的な定義さえ不足がある。

さて、変換 $A, B, C, \dots$ の系列が与えられたとせよ。もしこの系列が次の性質、すなわち任意の二つの変換の合成が、再びその系列に属する変換をうむという性質を持つ時には、この後者（系列）は変換群と呼ばれる。

変換が何個もあって列をなしている、その中の任意の二つの合成がまたその中の列に入っている。要するに変換に関して閉じている。閉じているだけで変換群と言っているのだから、群の公理としてはすごくちゃっちい。単位元もなければ逆元の話もない。でもクラインは変換に関して閉じているということが一番重要な性質であると捉えていることがわかります。

しかし、クラインの仕事は群の概念と、数学の他の分野での応用可能性をかなり拡張した。彼は、群論的なアイデアは数学において基礎的であるという見方を広めるのにも大いに力があつた。

今日我々は群論を知らずに数学を語るなんてあり得ないわけですが、つい 100 年くらい

前までは、そんなことは常識ではなかった。

群論の特別な主題は、現代数学すべてを貫通して広がっている。

順序構造とか分類原理とかいうものと同様に、群論がもうほとんどすべてのさまざまな分野に介入している。

群論が幾何学と結びつけられるものとしては、変換群でない“運動幾何学”と言われるもう一つの文脈があった。“運動幾何学”とは、幾何学的な対象の運動ないし変換を群の要素として用いる。すでに 1856 年にハミルトンは、正多面体の「群」を（暗黙に）考えていた。ジョルダンは 1868 年に、ユークリッド的な三次元空間の運動の群のすべての部分群を分類することをなした。そして、クラインは、1884 年の正 20 面体の講義 (Lectures on the Icosahedron) の中で、正 20 面体 (icosahedron) の対称群を用いて、5 次方程式の“解法を与えた”。

解決したって言ってもその解決の仕方が特異だということだった。ある特別の、20 面体の対称群を利用して解いた。

彼は、正多面体の回転群と、多項式で表わされる代数方程式と、複素関数との間の深い関係を描いて発見したのである。それらの論文の中で、“Klein 4-group.” (クラインの 4 群) もまた現れている。

1860 年代後半にクラインとリーは、次の試みを共同で行った。“それ自身に変換されるような、幾何学的及び解析的对象を、変化の群 (groups of changes) を用いて探求する” (これは、1894 年に彼らのジョイントプログラムについて、クラインが過去を振り返って述べたものである。) クラインが離散的な群に集中している間、リーは連続変換群を研究していた。リーは、連続的な変換群の理論は、幾何学においても微分方程式においても非常に強力なツールになるだろうと、認識した。そして彼は、“〔連続〕変換の……すべての群を決定する”という任務を自身に課した。彼は 1880 年代初期には、それらの群の分類でもって彼の目的を達成した。不連続な変換群の分類は、数年早く、ポアンカレとクラインにより得られた。

不連続と連続変換群の分野において技術的業績を超えて一より広範囲な諸理論が両方の領域で展開し、両方ともまだ研究分野として生きている。これらの理論を基礎づけることにおいて私達にとって重要なことは、以下のことである：

- (i) それら (広範囲な諸理論) は、群概念の視野の大きく拡張した一置換群および可換群から変換群へ；
- (ii) それらは、非有限 (無限) 群の重要な具体例を導入した一以前は、研究の唯一の対象は有限の群であった；
- (iii) それら (不連続と連続変換群の分野) は、群概念が応用される範囲を、数論、代数方程式の理論、幾何学、微分方程式一常微分方程式と偏微分方程式両者とも、および関数論 (保形関数、複素関数) の大きな領域へと、大きく拡大した。

これら 3 つのすべては、抽象的な群概念の出現（登場）に先がけて起こった。事実、これらの展開は、次に説明する抽象群の概念の出現に役立っていた。抽象群に関しては次節で述べよう。このセクションのより一層の詳細のために参照 [5], [7], [9], [17], [18], [20], [24], [29], [33].