「A History of Abstract Algebra by I.Kleiner」
長岡亮介数学勉強会　第 18 回（p30-32）

２　History of Group Theory

2.3 Emergence of abstraction in group theory（その１）群論における抽象の登場

群論における抽象的な観点はゆっくり登場した。抽象的な群概念が進展するためには、1770 年のラグランジュのはっきりしない群論的な仕事（代数方程式の可換性に関する研究）から 100 年以上かかった。E.T. ベルは、抽象と公理化への発展のプロセスにおいて、いくつかの段階をはっきりと識別している。：

> 全体の展開は約 1 世紀を必要とした。その進歩は、最近の期間のいずれの主要な数学的理論の発展について特徴的である。；はじめに、分離された諸々の現象（個々バラバラで関連が見えていない諸現象だけの）の発見、そして、すべてのものに共通の、ある特定の特徴の認識（置換の話、変換群の話、もともと別のものだが、両方とも群として考えれば同じ)、次に、さらなる例、それらのより詳細な計算、そして分類への研究、そして、ある確定された応用のためには必要とされていないならば余分なことかもしれないが、より進んだ計算をするための一般原理の登場、そして、最後に、探求されるべきシステムの構造を、抽象的な形で結晶化させている公準（公理）の定式化。[２]

多少簡略化しすぎられているけれども、すべてのそのような一般化がそういう傾向であるように、これはそれでも有益な枠組である。実に、最初、群論の場合には、最初に“分離された（個々バラバラの）現象”がきた − 例えば、置換、２項２次式、１（イチ）のベキ根たち、；そして、“共通な特徴”の認識 − 有限群の概念、置換群と有限アーベル群両方ともに包括する概念（参照．上で引用されたフロベニウスとシュティッケルベルガーの論文)；次に、“他の事例”のための探求、− 私達のケースでは変換群；そして最後 “公理”の定式化 − この場合、群の公理、有限群および無限群の両方を包括するような。私達は、いつどのようにして抽象化のための中間的な段階と最終段階が起こったのかということについて、これから考えよう。

1854 年に、ケーリーは、“記号方程式 $\theta^n = 1$ に関係する、群の理論について”というタイトルの論文において、有限群の最初の抽象的な定義を与えた。(1858 年に、デデキントは、ゲッティンゲンのガロワ理論の講義において、もう一つのもの（ケーリーを知らずに有限群の抽象的な定義）を与えた。参照 8.2)。ケーリーの定義：

> 記号の集合 $1, \alpha, \beta, \cdots,$ それらすべて異なっていて、かつそれらのうち任意の２つの積 $(\alpha\beta)$（位数は関係なく)、またはそれらのうちの任意の 1 つとそれ自身との積 $(\alpha\alpha)$、がまた集合に属しているような記号の集合が、群であると言われる。

ケーリーはそれを言い続けた：

> これらの記号は、一般的には逆転 [交換] 可能ではないけれど、結合的ではある・・・、そして、以下のことがわかる。全体の群というものは、任意の一つの記号、より遠かろうと近かろうと $(\alpha, \beta, \gamma$ の時、α から見れば β は近いが γ は遠い) 因子の記号 [すなわち左または右の] によって掛けられた時、群を単にもう一度再生産するだけである。[33]

例えば $\{1, -1, i, -i\}$ に i をかけると $\{i. -i, -1, 1\}$ となる。彼はその時、四元数 (しげんすう)（加法の下の)、正則（可逆）行列（乗法の下の)、置換、ガウスの２次形式、楕円関数論に関連して出てくる群たちなど、群のいくつかの例を見せた。次に彼は、全ての抽象群はある置換群と同型（私達の専門用語で）であることを示した。その成果は、現在はケーリーの定理として知られている。

彼は、同型群の概念に十分に気づいていたようであったが、彼はそれを明示的に定義しなかった。しかし、彼は（有限）群の乗積表を導入し、一つの抽象群がその乗積表によって決定されると主張した。それで、彼は位数 4 と位数 6 の群の乗積表を表示することによって、すべての群を決定した。さらに、彼は、位数 n の 巡回群が、“全ての点で、普通の方程式 $x^n - 1 = 0$ の根たちのシステムと相似している” こと、そして、与えられた素数を位数にもつ群はたった一つしかないということに言及した。抽象群のケーリーの定義の議論のために [35] 参照。8.1 章もまた参照。

群の抽象的な視点へのケーリーの志向－群論の発展においてこの時に顕著な成果－は、少なくともある程度、ブールの抽象的な仕事との接触のためであった。数学の抽象的基礎づけを持つ懸念は、すでに 1840 年代にブール、ケーリー、およびシルベスターのまわりのサークルで特有であった。

しかし、ケーリーの偉業は個人的な勝利だけであった。彼の群の抽象的な定義は、その時注目されず、ケーリーはすでによく知られていたけれども。数学界は、明らかに、そのような抽象化に対する心構えができていなかった：真面目な研究をされていたのは、置換群だけだった。より一般的に言えば、数学への抽象的な接近はまだまだ幼稚な（成熟していない）段階であった。“時期尚早で抽象論は耳を傾けてもらえない。彼らが数学者であろうと学生であろうとなかろうと。”クラインが彼独特の言い方 [21] で示している。より一層の詳細は [22],[23],[24],[25],[29],[33] 参照。

抽象的な群概念が定着し始めたのは、ほんの四半世紀の後だった。そして、以下のことをやったのは再びケーリーであった。1878 年に書かれた群論の 4 つの短い論文で、彼は 1854 年に採用した抽象的な観点に戻った。彼は与えられた位数のすべての群を見つける一般問題を述べて、どのような（有限）群でも置換群と同形であることを示した。しかし、彼は言っている：

> これ…一般問題を扱う最もよいまたは最も容易な方法で、それを全て置換の問題としてみなしていることは、上手い方法とは思えない、: 一般問題を一般問題として考察し、抽象的な考察が終わったら置換群の理論を応用することが、現実的だろう。

ケーリーのこれらの論文は、1854 年のものと違って、基礎づけとなる群論的研究の多くを刺激した。

群論（そして代数学として一般的に）の抽象的な観点を進めたもう一人の数学者は、ウェーバーであった。ここに彼の、1882 年に出された 2 次形式についての論文の中の、抽象（有限）群の “現代” の定義がある。[23]：

> h 個の任意の要素 $\theta_1, \theta_2 \cdots, \theta_h$ からなる系 G は、以下の条件のもとで、位数 h の群と呼ばれる。
>
> I.　合成法または乗法と称されるある規則によって、同じ系のいずれかの 2 つの要素から、同じ系の一つの新しい要素を引き出す。記号では　$\theta_r \theta_s = \theta_t$ 。
>
> II. それは次のことがいつも真である。$(\theta_r \theta_s)\ \theta_t = \theta_r(\theta_s \theta_t) = \theta_r \theta_s \theta_t$。

Ⅲ. $\theta\,\theta_r = \theta\,\theta_s$ または $\theta_r\theta = \theta_s\theta$ から、$\theta_r = \theta_s$ が言える。

ウェーバーと他の抽象群の定義は当時、有限群のみ適用された。それでも、それらは置換群と（有限）アーベル群の２つの理論をもたらした。すなわち古典的な代数学の二つの源－多項方程式論と数論－から派生していた。（不連続と連続）変換群の理論から起こってきた無限群は、それらの定義に包含されなかった。

ヴァルター・フォン＝ダイクは、1882 年にタイトル "群論的な研究" という、重要で有力な論文で、抽象群論の歴史的な源泉–代数学的、数論的、幾何・解析–のすべてを、初めて意識的に包括し、結合した。彼の著述は以下のとおり：

> 以下の調査は、抽象定式化における群の特性の研究を続けることをめざしている。特にこれは２つの問題を見せるだろう。一つは、ここの軍に存在した不変特性が、どの程度まで広がるかという問題、もう一つは、これらの性質の本質的な群論的内容を正確な決定へと導くものは何かという問題。[33]

フォンダイクの抽象群の定義、有限群と無限群の両方を含んだもの、は、ジェネレータ（彼はそれらを "operations 作用" と呼ぶ）の用語の中で与えられ、関係（定義は多少長い－ [7] を見よ）を定義した。彼はこのように強調した、"このように、すべての同型群は単一群に含められている。群の本質は、その作用たちの特定の形によって表現されるだけでなく、むしろそれらの相互の関係によって表現される" 。 さらに彼は n 個のジェネレータを持つ自由群を組み立て続けて、（本質的に、専門用語を使わずに）すべての有限に生成される群は、有限階数の自由群の商群であることを示した。

群論のための公理の観点から重要なものは、フォンダイクが、群の定義において逆元の存在を、初めて明示的に要求した最初の人だということである："私達が考えている作用を含んでいる群 T_k は、その逆の T_k^{-1} も含んでいるにちがいない、ということを要求する" 。 ２番目の論文（1883 年）で、フォンダイクは、群論の抽象的展開を、置換群、有限巡回群（多面体の対称性）、数論的な群、および変換群へ応用した。

次の 20 年で、群のための様々な公理が数学的文献に発表されたけれども、群論の抽象的な観点は、一般的に賞賛されなかった。特にクライン、群論の発展への主要な貢献者のうちの１人であるが、次のように考えた。"抽象的な定式化は、証明を解くために優れているが、新しいアイデアと方法を発見することは手助けしない "、そして加えて、"一般に、[抽象的な] 方法の不利は、考えを促進することに失敗する" と。[33]

クラインの留保にもかかわらず、数学界は、この時（1880 代始め）抽象的な定式化を受け入れた。(cf .1854 年のケーリーの定義への返答)。この受容の主要な理由は下記であった：

(i) 今や群のいくつかの主要な "具体的な" 理論があって－置換群、可換群、不連続変換群（有限と無限のケース)、および連続変換群－、それらの群の本質的な側面の抽象化を是認した。

(ii) 群は、数学の多様な分野で中心的な役割を果たすようになった、代数の異なる部門、幾何学、数論、解析のいろいろな領域、そして、群の抽象的な観点は、そのような応用のためには本質的であったことを明確化するために、またさらなる応用のための機会を提供する、と考えられた。

(iii) 正式なアプローチが、集合論と数理論理学の数学への浸透に助けられて、数学の他の諸分野で広く行われるようになった。例、幾何学と解析学の様々なエリアで。

次のセクションでは、とても簡単に、群論の抽象的なポイントの発展をフォローしよう。