「A History of Abstract Algebra」勉強会…第 19 回
(p33-34)

2.4 Consolidation of the abstract group concept; 抽象群概念の基盤整備
dawn of abstract group theory 抽象群論の夜明け

抽象群概念は、1880 年代と 1890 年代の間に急速に広がったけれども、まだ非常に多くの論文が置換群と変換群について書かれていた。抽象群の理解が広まったはずなのだが、必ずしもみんなそれが大事だとは思っていなかった。抽象的な観点は 2 つの方法で宣言された：
(a)“具体的な”群の設定において導入され証明された概念と諸結果は、抽象的な設定において今や再定式化され、再証明(reprove)された；
(b) 抽象的な設定に源を発する、またそれに基づいての研究が、出現しはじめた。

前者のケースの興味深い例は、フロベニウスによる、抽象的設定において、シローの定理を再証明(reprove)したことである。シローの定理とは、1872 年に置換群の場合についてシローにより証明されたもの。これは、1887 年に“シローの定理の新証明”というタイトルの論文で、なされた。フロベニウスは、すべての有限群はある置換の群で表現できるという事実から、シローの定理が全ての有限群について成り立つにちがいないということを認めていたのだが、フロベニウスは、定理を抽象的に打ち立てることを望んだ：

すべてのシローの定理の証明に導入される対称群が、シローの定理の文脈に全く合わないのだから、私はシローの定理の新しい導出を見つけようとした。

シローの定理に関連した抽象群論の発展のケーススタディのために、 [28]と[32]参照。

ヘルダーは、抽象群論ついて重要な貢献者であり、多くの群論的な概念を抽象的に導入するために功績があった。例えば、1889 年に彼は商群の抽象的な概念を定義した。商群は最初“予備の方程式”の群として、次に準同形写像として、そしてヘルダーの時には剰余類の群として。彼はその時ジョルダンーヘルダーの定理の証明を“完成した”。すなわち組成列の商群は元々が同形であれば不変である。（ジョルダンの貢献、P25 を見よ）。商群の概念の歴史のために[36]参照。

1893 年 位数 p^3、pq^2、pqr、および p^4 の群に関する論文で、ヘルダーは群の自己同型の概念を導入した。彼は、また抽象的に単純群を研究した 1 番目の人でもあった。（以前に、それらは具体的なケースに考慮されていた－－置換群、変換群、諸々。） 彼は言った。：“有限個の演算（要素）を持つすべての単純群の研究が知られていたなら、最も大きい興味となっただろう。“（“操作”とは、ヘルダーは“要素”を意味していた）。彼はその時、位数 200 までの単純群を決定するところまでいった。

抽象的な設定での研究の他の典型的な例は、1897-1898 年のデデキントと G. A.ミラーの論文である。それは、ハミルトニアン群、すべての部分群が正規である非可換の群につ

いての論文である。彼らは（独立して）そのような群を抽象的に特徴付けていた、そして、2 つの要素の交換子 commutator と交換子部分群の観念を導入した。（ジョルダンは以前に 2 つの置換の転換器の観念を導入していた）。[24]、[33]参照。

群指標の理論と有限の群の表現理論、それは 19 世紀の終わりにバーンサイド、フロベニウス、および Molien モリエンにより創作されたものであるが、それらもまた抽象的な群理論のエリアに属している。それらは抽象的な群について重要な結果を証明するために使用されたように。詳細のため[17]参照。

抽象的な群概念は 19 世紀の終わりに確立されたけれども、“これは、論文、教科書、研究論文、および講義の中の提示方法として一般的に受け入れられるものになったわけではなかった。抽象的な群概念に基づく群理論的な研究論文は、20 世紀のはじめまで出現しなかった。それらの出現は群論の誕生の印だった。"[33]。

抽象群に完全に捧げられた最初の本は、1904 年 J. A.ド・セギエの *Elements of the Theory of Abstract Groups*（抽象群の基礎理論）[27]であった。その本の冒頭において、カントルの仕事に基づいた集合論的な導入がある。“ド・セギエは、非可算基数のカントルの発見に最初に注目した代数学者だったと言えよう"[7]。両側から消し合い規則をもった半群の概念の導入、および有限半群は必ず群になるという証明が次に来る。群の公理の独立性の証明もある。

ド・セギエの本もまた、同型、準同型、自己同型、群の直積分解、ジョルダン－ヘルダーの定理、第一同型定理、可換群の基本定理、ハミルトン群、p 群の理論などの議論を含むものだった。

ド・セギエのスタイルは、Dyck のスタイルとは対照的です。 ド・セギエのスタイルは、直感的な考察が全くない。そして、可能な限り抽象的であり、可能な限り一般的である傾向性がはっきりある。[7]。

ド・セギエの本は、主に有限群に当てられていた。群論に関する最初の抽象的な研究論文、それは一般には群を扱っているが、有限群は 1 章でしかない、その論文は 1916 年 O.J.シュミットの“抽象群論”[26]だった。 シュミットはロシア群論学派の創始者であり、最初の 4 章を有限群と無限群に共通の諸性質に当てた。有限群の議論は全部で 10 章のうち第 5 章に延期された。 [7]、[10]、[33]参照。