

長岡亮介数学勉強会

「A History of Abstract Algebra by I.Kleiner」

第 21 回 (p41-42)

3 History of Ring Theory 環論の歴史

代数学の教科書は、通常最初に環の定義を与えて、続いて具体例がある。もちろん、諸々の具体例は最初にきて抽象的な定義は後に、ずっと後になってくるものもある。従って、私達も具体例から始める。

環の最も重要な具体例は、整数全体の集合、多項式全体の集合、および行列全体の集合である。これらの具体例の“単純な”拡大は、環論の元となったものである。特に、私達は以下の 3 つの具体例を念頭に置いている：

(a) 整数全体の集合 Z は、体 Q の適切な部分領域とみなしうる。 Q とは、数論で言う所の有理数全体の集合である。(有理数自身は、以下の目的には不適當である：すべての有理数はすべての他の (ゼロでない) 有理数で割り切れるから整数論の研究には不向きである)。有理数の単純拡大体 $Q(\alpha)$ を取ると、 α は代数的数であり、すなわち、整数係数を持つ多項式の根である。 $Q(\alpha)$ は代数的数体と呼ばれる；それは、有理数の係数を持つ α の多項式から成っている。例えば、

$$Q(\sqrt{3}) = a + b\sqrt{3}: a, b \in Q$$

数論で言う所の $Q(\alpha)$ の適切な部分域 $\sim Q(\alpha)$ の“整数環” $\sim$ は、整数の係数を持つモニック (最高次の係数が 1 に等しい) 多項式の根たちの要素からなっている。モニック多項式 $p(x)$ とは、 x の最高次の係数が 1 に等しいものである。例えば、 $Q(\sqrt{3})$ の整数環は、 $\{a + b\sqrt{3}: a, b \in Z\}$ である。(これは直ちにわかることではない)。これは私達の最初の例、代数的整数である。

(b) それぞれ 1 つと 2 つの変数を持つ、多項式環 $\mathbf{R}[x]$ と $\mathbf{R}[x, y]$ は、重要な特徴を分け持つが、また、かなり際立って違う ($\mathbf{R}$ は実数を示す)。特に、1 変数を持つ多項式の根が $\mathbf{R}$ の離散集合を構成しているのに対し、2 変数を持つ多項式の根は、平面曲線—いわゆる代数曲線を構成している。そして、私達の 2 番目の例が、2 つ (または、より多く) の変数を持つ多項式の環である。

(c) m 次正方行列 (例えば実数全体の上の) は、成分ごとの加法と適切な乗法について環の公理に従う実数の m^2 対 (タプル) (m^2 次元のベクトル) として見なすことができる。より一般に私達の 3 番目の例は、成分ごとの加法と適切な乗法について実数 n 次 (n 重対) 全体の集合 R^n は、(必ずしも可換ではない) 環となる。そのような体系、しばしば複素数の拡大は、19 世紀および 20 世紀初めにおいて、超複素数系 hypercomplex number systems と言われた。

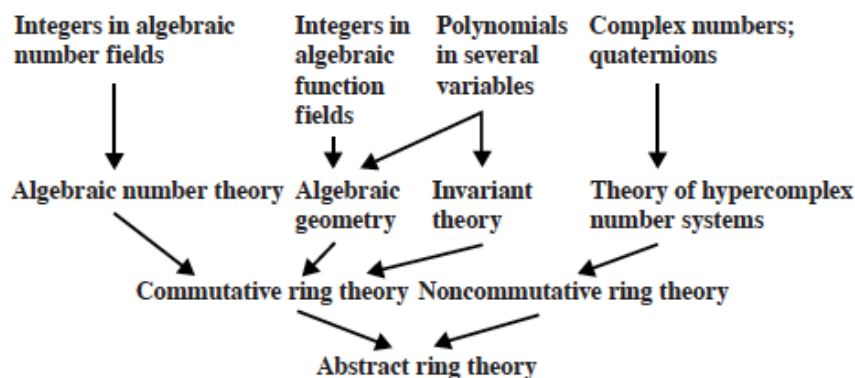
これらの例はどんな文脈で生じたか？それらの重要性は何であったか？答えは私達を環論の起原に導く。

環は 2 つの広いカテゴリーに分かれる：可換環と非可換環である。これらの 2 つのカテゴリーの抽象的な理

論は、別個の源から来て、種々の方向に発展した。可換環論は、代数的数論、代数幾何学、および不変式論に端を持つものである。これらの主題の発展の中心は、代数的数体や代数関数体上の整数の環、及び 2 変数以上の多項式の環であった。

非可換環論は、複素数が様々な超複素数系に拡張する試みから始まった。可換環論と非可換環論の誕生は、19 世紀始めに遡るが、環論の成熟は 20 世紀の 20 年代には達成された。

以下は上記の意見の図表のスケッチである。



Integers in algebraic number fields : 代数体の整数 Integers in algebraic function fields : 代数関数体の整数 Polynomials in several variables : 多変数の多項式 Complex numbers; quaternions : 複素数; 四元数

Algebraic number theory : 代数的整数論 Algebraic geometry : 代数幾何 Invariant theory : 不変式論 Theory of hypercomplex number systems : 超複素数系の理論

Commutative ring theory : 可換環論 Noncommutative ring theory : 非可換環論

Abstract ring theory : 抽象環論

私たちは、より単純な説明で持って非可換環論の解説を始めよう。

3.1 Noncommutative ring theory 非可換環論

厳密な意味において、非可換環論は一つ具体例—四元数に端を発した。それは 1843 年にハミルトンにより発明された（発見されるか？）。四元数とは、形式 $a + bi + cj + dk$ (a, b, c, d は実数) の “数” であって、それらの数は成分ごとに足し合わせることができ、それらの掛け算は、 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ の規則に従う。

(RN) これは簡単にわかることなんですけど、 k^2 が -1 しかも $ijk = -1$ ということは、 ij というのは実は k だということなんです。同様に jk も i になる。 ki は j と言える。そういう性質を満たすもので、 ij は k になるけど、 ji つまり反転したものは $-k$ になる。非可換なのです。これは非常に面白い。

これは、非可換数系の最初の例であり、実数および複素数のすべての（代数的）の法則に従う、ただし乗法の可換性を除く。そのような系は現在、歪体または可除環（または可除代数）と呼ばれる。四元数を導入することにおけるハミルトンの動機づけは、平面のベクトル代数から 3 次元のベクトル代数へ拡張することであった。

(RN) 複素数が2次元の動きを例えば積で表現できるとすると非常に強力な武器になるのですが、3次元の中での動きをやるのに良い数が存在するに違いないとハミルトンは考えた。最初3次元で考えた。 $x + yi + zj$ で虚数単位が2個ある。それは自然なことだけどどうやっても上手くいかない。ある時突然4個にしてみた。この発見にハミルトンはえらく感動した。実は quaternions というのは、3次元のベクトルの回転とか表現するのに非常に適していて、今ゲームを作っているアニメーション作成者たちも無意識に quaternions を使っているのですね。

この仕事に失敗したのち、彼は、実数の四重対 quadruples に首尾よく成功した。“純粋な”四元数は、実のところ3次元空間のベクトル代数を生み出すことになる。詳細は [19]、8.5 章参照。

(RN) pure quaternions とは、純粋な四元数で、実部がない、虚部しかない。 $a+bi+cj+dk$ の a がない。 $bi+cj+dk$ そういうのを純粋な四元数という。それが3次元の運動を表現するのに適している。