長岡亮介数学勉強会
「A History of Abstract Algebra by I.Kleiner」
第 22 回（p42-43）

3 History of Ring Theory
3.1 Noncommutative ring theory
3.1.1 Examples of Hypercomplex Number Systems 超複素数系の例

四元数のハミルトンの発明は、概念的に革分けであった－－ポアンカレと一致するほどの“幾何学において ロバチェフスキーが達成したものと完全に同様な数論”における革命として。実に、両者の業績は、世間に流布している考え方を根底から覆すことであった。しかしながら、すべての革命のように、四元数の発明は、最初普遍的な礼賛とは程遠いほんのわずかの賛同しか得られなかった：“私はまだ明確な視界を持つにいたっていない。私達が自由に任意に虚数を創りだし、虚数に超自然的な性質を与えるということがどの範囲にまで及ぶのかということに関しては“、とハミルトンの友人の数学者ジョングレーブズは言明した。

しかしグレーブズを含むほとんどの数学者は、ハミルトンの観点の近くに、すぐやって来た。四元数は、多様な“数システム”の探求のための触媒として作動し始めた。“数システム”とは、実数と複素数システムから様々な方法で出発した特性を持つもの。そのような超複素数システムの例は以下の通りである：

(i) Octonions 八元数（ケーリー数）Octonions 八元数は、四元数を含む実数の 8 つの順序対であり、乗法が非結合的である division algebra（可除多元環）を形成している。それらは 1844 年にケーリーにより導入され、それとは独立にハミルトンの“虚数”を疑ったまさしくそのジョングレーブズによっても。

(ii) Exterior algebras 外積代数学 Exterior algebras とは実数の n 重対であり、それは成分ごとに加えられ、外積を介して掛け合わせることができるものである。1844 年にグラスマンにより、n 次元空間にベクトル代数学を構成する目覚ましい試みの一部として、Exterior algebras は導入された。グラスマンのスタイルは到底シンプルとは言えず、彼のアプローチは時代に先んじていた。

(iii) Group algebras 群代数 1854 年に、ケーリーは（有限の）抽象群の論文を出版した、その論文の最後に群代数（実数体または複素数体の上で）の定義を与えた。彼はそれを“複雑量”集合と名付けた、そしてそれがハミルトンの四元数と相似であることを証明した－－それは結合的であり、非可換であるけれども、一般には division algebra（可除多元環）ではない（逆元がない）ということを。

(iv) Matrices 行列 1855 年と 1858 年の 2 つの論文においてケーリーが正方行列を導入した。彼は以下のことを言及した、それらは“単一の量”として取り扱うことができ、”普通の代数的量“のように加算乗算できるが、“乗算において、行列は一般に交換可能 [可換] でないという特異性がある”。5.1.3 章を見なさい。

(v) Biquaternions 双四元数これらは幾何学と物理学における問題に関連して 1873 年にクリフォードにより導入された。h_1 と h_2 が四元数とする時、$h_1+h_2\alpha$ という形の要素であり、$\alpha^2 = 1$、$\alpha h_i = h_i\alpha$ が成り立つ

という α（Biquaternions）が存在する。[2]、[14]、[16]、より一層の詳細のための [19] を見なさい。