

長岡亮介数学勉強会

「A History of Abstract Algebra by I.Kleiner」

第 23 回 (p43-45)

3 History of Ring Theory

3.1 Noncommutative ring theory

3.1.2 Classification 分類

30 年間 (1840 年から 1870 年頃) に非可換の数系の諸例はたくさん溜まってきた。今こそ、理論の構築をし始める時である。超複素数系 (現在の用語では、有限次元代数) の一般的な概念が出現し、これらの構造を特定のタイプに分類する作業が始まった。私たちは、3つのそのような展開に焦点を当てよう、結合律が成り立つ代数を扱いながら。もちろん、そのような代数は環たちであることに注意して。

(i) Low-dimensional algebras 低次元代数 ここで最も重要なのは、ハーバード大学のベンジャミン・パースの仕事だった。なぜならアメリカにおける代数への最初の重要な貢献をしたからである。私たちは彼の根本から覆すような 1870 年の論文「線形結合代数」について言っているが、150 ページの論文の最後の 100 ページで、パースは次元が 6 未満の代数 (すなわち超複素数系) を、乗積表を与えることによって分類した。そのような代数を 150 以上も彼は示した！ただし、この論文で重要なのは分類ではなく、それを得るために使用された手段である。ここでパースは基本的な諸概念と導かれる諸結果を導入したが、これはその後続く発展の基本であることがわかった。これらの概念的な進歩の中には次のようなものがある。

(a) 有限次元代数の“抽象的な”定義。パースはそのような代数—“線形結合的代数”と呼んだ—を、形式 $\sum_{i=1}^n a_i e_i$ 、 e_i は“基底要素” (基底の実数倍の形式和)、で表現されるような形式表現全体と定義した。加法は成分ごとに定義され、乗法は“構造的定数” c_{ijk} を用いて、言い換えると

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^n c_{ijk} e_k$$

と定義する。結合律と分配律は仮定されたが、交換律は仮定されなかった。これはおそらく結合的代数の最も早い明示的な定義である。

(b) 複素係数の使用。パースは $\sum a_i e_i$ の表現での係数 a_i を複素数とした。 R から C への係数体の意識的な拡張は、任意の体からとらえた係数への道に発展するための重要な概念的な進歩だった。

(c) 代数が単位元を持っているという要件の緩和。これも過去の慣習からの離脱であり、パースの一般的で抽象的なアプローチを示唆した。

(d) nilpotent (冪零) 要素および idempotent (べき等) 要素の導入。ある代数の要素 x が、ある正の整数 n に対して $x^n = 0$ の場合は nilpotent (冪零) であり、 $x^2 = x$ の場合は idempotent (べき等) である。これらの概念は、その後の代数の研究及びさらに後になってくると環の研究の基本となっていることがわかった。

パースは、任意の代数には nilpotent (冪零) または idempotent (べき等) 要素が含まれているという基本的な結果を証明した。

(e) パース分解。もし e がある代数 A のある idempotent (べき等) であるならば、

$$A = eAe \oplus eB_1 \oplus B_2e \oplus B$$

、という 3 つのモジュール、 e を用いてに分解できることを示した。ここで

$$B_1 = \{x \in A : xe = 0\}, B_2 = \{x \in A : ex = 0\}, \quad (1)$$

$$B = B_1 \cap B_2 \quad (2)$$

($\oplus$ は直和を示す)。ある idempotent (べき等) の要素に関する代数のパース分解は、その構成する諸部分を研究することによって、よりよく代数を捉えることを可能ならしめた。それは今でも環と代数の研究で中心的なツールである。

パースの研究は時代を十分先んじていた。最初はほとんど注目されていなかった。たとえば、ケイリーは 1883 年に科学の進歩のための英国協会での挨拶でパースを賞賛したのだが、その際に“普通の数学の外にあるもの”と呼んだ。でもアメリカのパースの賞賛者でさえ、彼の業績を、数学そのものというよりは“数理哲学”と表現しました。もちろん、後でパースは数学の大先駆者であったということがわかった。それくらいパースは認められてこなかった。

(ii) Division algebras 多元体 私達が言及したように、非可換多元環の最初の例、すなわちハミルトンの四元数は多元体であった。以下のことに関する問題は起こった。 R (実数の n 重対の多元環) の上で他の有限次元の多元環は多元体であるか。答えはそれぞれ独立にフロベニウス (1878 年に) と C.S. パース (B. パースの息子、1881 年に) から与えられた。：唯一のそのような多元体は、実数全体の集合と複素数全体の集合と四元数全体の集合だけであると。

(iii) Commutative algebras 可換多元環 1860 年代に、デデキントと Weierstrass ワイエルシュトラスは、 R 実数全体の集合または C 複素数全体の集合の上の有限次元の可換多元環だけが、冪零 (べきれい) の要素を持たない時には、 R または C のコピーの直和である。これが意味していることは、そのような多元環では加法だけではなく乗法も成分ごとに (componentwise) 与えられる。この結果は 1880 年代に出版された。[2]、[16]、より一層の詳細のための [19] を見なさい。