長岡亮介数学勉強会
「A History of Abstract Algebra by I.Kleiner」
第 24 回（p45-47）

3 History of Ring Theory
3.1 Noncommutative ring theory
3.1.3 Structure 構造

非可換多元環の最初の例は、1843 年にハミルトンから与えられた。続く 40 年間には数学者たちは他の諸例を導入した、諸例にある秩序を持地込みだしたが、特別な注意に値するある種のタイプを絞り出した。その段階は、有限次元で非可換で結合的な多元環の一般理論の基礎づけの一揃いだった。仕事は 19 世紀の最後の 10 年と 20 世紀の最初の 10 年において遂行された。しかしそれ以前に、結合多元環へと発展していく数学の研究に重要なインパクトを与えるような仕事が起こっていた。これは。1870 年代と 1880 年代におけるリー群とリー環の基礎であった。

リーは、微分方程式（cf. ガロア理論）の研究を容易にするように、1870 年代に、連続変換群（今やリー群と呼ばれる）の理論を基礎づけた。ガロアが有限（離散的）置換群を代数（多項式方程式）と結び付けたように、リーも無限（連続）変換群を微分方程式に結び付けた。彼はその後、微分方程式の目的にとって、リー群の“局所”構造に注目するだけで十分であることを示した。すなわち、“無限小変換”、 それはリー積を用いて掛けられた時にリー環を形成するようなものである。（もし S、T が無限小変換だとしたら、リー積 $[S, T]$ は、$[S, T] = ST–TS$ と与えられる。）　ちょうど代数方程式の場合と同じように、リーの理論においても、特別な興味の対象は“単純”リー群である。これら“単純”リー群たちは“単純”リー環（すなわち、イデアルなしのそれら）を作る。従って、リーは、リー環とは、“単純”なリー環に特別な注目をもって、リー環の構造を研究するということを提案した。課題はキリングとカルタンにより見事に 1880 年代に解決された。二人は“半単純”リー環（すなわち、0 ラディカルを持つ環）を、単純なリー環へ分解し、のちに分類した。 [2]、[19] を見なさい。

(i) R 実数全体の集合または C 複素数全体の集合の上の多元環

1890 年代カルタンとフロベーニウス、とモリーン Moline は、以下の実数又は複素数上の有限次元の結合多元環のための、基本構造定理を（それぞれ独立に）証明した。もし A がそのような多元環であるならば

(a) $A = N \bigoplus B$、ここで N は冪零（ベキレイ）で、B が半単純である。冪零多元環 N とは、ある正の整数 k に対して $N^k = 0$ となるものある。半単純多元環とは、自明でない冪零イデアルを持っていないものである。－これは、少なくとも半単純性についての根本となる考えであった。

(b) $B = C_1 \bigoplus C_2 \bigoplus \cdots \bigoplus C_n$ 、ただし C_i が単純多元環、すなわち自明でないイデアルを持っていない。

（冪零部 N は手に負えない、今日でさえ。）

(c) $C_i = M_{n_i}(D_i)$、多元体 D_i 上の $n_i\times\, n_i$ 行列の作る多元環。

上記の表現は、さらに一意的である；すなわち n と n_i は一意的であり、N、B、C_i、D_i は、同型を除いて一意的である。

この結果を生み出す直接的インスピレーションと動機づけは、リー環論（上で見なさい）の隣接理論から来た。しかし、それに他の先例があった、代数学における分解定理として生じる－－例えば、代数的数体の整数環におけるイデアルを素イデアルの積へと一意分解することは、デデキントが 1871 年に与えている（ページ 51 を見よ)、又、有限可換群を素数べき位数の巡回群の直積に一意分解することを、フロベーニウスとシュティッケルベルガーが 1879 年に証明した。(ページ 28 を見よ)

上記の結果を確立した 3 人の数学者の仕事の中で、カルタンの証明が最も最も影響力が大きかった。しかし、彼の証明技法は、ウェッダーバーンのものにすぐ取って代られた（以下を見よ)。構造定理を別とすれば、長続きすることが示されたものはカルタンが導入した以下の 4 つの概念、直和、イデアル、単純多元環、および半単純多元環である。彼の論文の終わりにもかかわらず、しかも構造定理をより簡潔に述べるだけだったのに。

カルタンは、非可換と結合多元環の文脈において、これらの観念を明示的に導入した最初の人であった。（デデキントは、20 年以上早く、ある種の可換環のためのイデアルの概念を導入したけれども、下で示すように、カルタンの仕事にデデキントのイデアルの参照が全然ない。）例えば、カルタンはイデアル－－彼はそれを“不変量の体系”と名付けた－－を次の通り定義した：

> 系 Σ は不変系 σ を中に含む。もし、σ のすべての要素が Σ に属していて、Σ の任意の要素と σ の任意の要素とを右側でも左側でも掛けた積がまた σ に付属することである。

詳細は [16], [19] 見よ。

(ii) Algebras over arbitrary fields（任意の体の上の代数（多元環))

19 世紀の終わりに、有限次元の代数の理論が成熟の段階に入った。リーの連続群論と有限群論との間の重要な関連付けが、群の表現論を介してなされた。同時に結合環の主要な構造定理は利用可能であった。従って、有限次元環の理論は、重要な数学的な研究のための分野として独立した。この有限次元環についてさらなる進展のために必要なものは、新しい出発であった。これは、1907 年の“超複素数について”というウェッダーバーンの先駆的な論文で提供された。 [20]

ウェッダーバーンの論文の主要な結果、すなわち有限次元環のための構造定理は、カルタンから与えられたそれと本質的に同じであった。それらは “単に” 代数のスカラー体を実数体 R または複素数体 C からの任意の体へ、一般化したに過ぎなかった。しかし、この一般化は、主題への新しいアプローチ－－その主要な概念と結果をもう一度考え直しもう一度定式化するという必要があった。

R または C の上の結合環の構造を扱うカルタンの方法は、代数のベクトル空間構造およびスカラ体に主に寄りかかっていた。彼は、特性多項式で最小の多項式を個々の代数と結び付けた－－それらの因子は与えられた代数の構造と関連した。例えば、カルタンは代数の“pseudo-null 擬似ヌル”要素を、特性多項式が 0 の根だけを持っているものとして定義した。この概念（“pseudo-null”）は、ベンジャミンパースが 30 年も前に定義した冪零要素の概念と同値であることがわかった。 [16] を見なさい。

有限次元環の構造の研究へのウェッダーバーンのアプローチは、非可換環の重要な諸例であるが、計算的なことよりも概念的であった。“以下のことは注目されるべきことである”と、彼は論文の終わりに書いた。“除

法に関する体の特質は、これより前の節の多くの定理において使われない”と。彼が初めて導入したかまたは環の研究に置いて中心にした概念の中で、今も－1世紀経ても－多元環研究の基本的であるとして学生に認められている概念は、イデアル、商多元環、冪零環、ラディカル、半単純と単純環、直和、およびテンソル積である。彼の仕事は、他の環論的な構造定理のためのモデルとして役立った。[16]、[20] 参照。