長岡亮介数学勉強会
「A History of Abstract Algebra by I.Kleiner」
第 25 回（p47-48）

3 History of Ring Theory

3.2 Commutative ring theory 可換環論

可換環論は代数的数論、代数幾何学と不変式論に端を発した、そして主にこれらの主題に次々に応用されていった。

3.2.1 Algebraic Number Theory 代数的数論

数論の中心的な専門領域のいくつかは、主にフェルマーの最終定理、相互法則、および２項２次形式のことであるが、代数数論の出現のための道具となった。これらの領域の主要な問題は整数の言葉で表現されているけれども、その解決には代数的整数として知られるようになったところの領域に整数を埋め込むことが必要であるということが徐々に明白になってきた。

(i) Fermat’s Last Theorem フェルマーの最終定理

18 世紀のオイラー、および 19 世紀初めの何人かの数学者たちは、フェルマーの最終定理（FLT）すなわちゼロでない整数の方程式

$$x^n + y^n = z^n (n > 2)$$

の非可解性を証明するために、n の値が小さい時でさえ“複素整数”が必要であることを認識していた。例えば、$x^3 + y^3 = z^3$ は

$$(x + y)(x + y\rho)(x + y\rho^2) = z^3$$

と書ける。ただし $\rho = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ は 1 の原始 3 乗根であり、これが領域

$$D_3 = \{a + bC : a, b \in Z\}$$

の方程式である。　$x^3 + y^3 = z^3, z > 0$ の可解性を仮定し、D_3 が一意分解整域（UFD unique factorization domain）として仮定した時

$$a^3 + b^3 = c^3, 0 < c < z$$

となる整数 a、b、c の存在することがわかる。この操作を無限に繰り返すと、正整数の無限下降列ができて矛盾に到達する。　もし同様に、1 の原始 p 乗根 ω（すなわち、ω は方程式 $x^p = 1, \omega \neq 1$) をとって、$x^p + y^p = z^p$ を

$$(x + y)(x + y\omega)(x + y\omega^2) \cdots (x + y\omega^p - 1) = z^p$$

と書くならば、いわゆる円分整数環

$$D_p = \{a_0 + a_1\omega + \cdot\cdot\cdot + a_p - 1\omega^p - 1 : a_i \in Z\}$$

での方程式を得る。（n= p ただし p は素数の場合に対して FLT を証明するだけで十分であることに注意しなさい。）もし D_p が UFD（一意分解整域）であると仮定すると、$u^p + v^p = w^p, 0 < w < z$ である整数 u,v,w が存在するということになって矛盾を得る。だから、これが FLT を証明している。　この方法はラメに 1847

年使われたもので、彼は FLT を証明したとパリ科学アカデミーで発表した。ラメの証明についての問題は、D_p がすべての素数 p において UFD であると、彼が暗黙に仮定していたことだった。これは もちろん間違いである、ラメの間違った証明への返答としてクンマーが指摘したように。クンマーは D_{23} が UFD ではないことを示した。1971 年に、$p \geq 23$ のどの素数 p に対しても D_p は UFD でないと明らかにされた。それにもかかわらず、$x^p + y^p = z^p$ を D_p での方程式として見ることが、FLT を扱う上で、重要なアイデアである。[9]、[13] を見なさい。

有理整数の問題を解くことにおいて、”複素整数”の有用性の初等的な具体例は、diophantine（ディオファントス）方程式

$$x^2 + 2 = y^3$$

それは有名な“バシェ Bachet の方程式”$x^2 + k = y^3$ の特別なケースであるが、のすべての整数解を見つける問題である。$x = \pm 5, y = 3$ が、$x^2 + 2 = y^3$ の解であるとわかることは容易である。しかし、他があるか？

すべての解を見つけるために、方程式 $x^2+2 = y^3$ を $(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i) = y^3$ と書く。これは領域

$$D = \{a + b\sqrt{2}i : a, b \in Z\}$$

での方程式である。D は UFD であり、$x + \sqrt{2}i$ と $x - \sqrt{2}i$ は、D において互いに素であることが言える。それらの積はある数の 3 乗だから、個々の因子もある数の 3 乗でなければならない（D において）。特に、ある整数 a , b に対して、

$$x + \sqrt{2}i = (a + b\sqrt{2}i)^3$$

が成り立つ。右辺の 3 乗を計算して実数と虚数の係数を同等視すると、$x = \pm 5, y = 3$ が $x^2 + 2 = y^3$ の唯一の解であることを容易に示すことができるーー複素整数の利用なしで達成することは容易いことではない。これが、オイラー（18 世紀の）がこの方程式を解いた方法である。