

長岡亮介数学勉強会

「A History of Abstract Algebra by I.Kleiner」

第 27 回 (p49-50)

3 History of Ring Theory

3.2 Commutative ring theory 可換環論

3.2.1 Algebraic Number Theory 代数的数論

(iii) Binary quadratic forms 2 項 2 次方程式

(整係数の) 2 項 2 次形式とは

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

という形式である。2 次形式論の大きな問題は、2 次形式 f で表すことができるすべての整数 $m = f(x, y)$ を全部見つけることだった。たとえば、フェルマーは整数 n の表現を 2 つの平方数の和、 $n = x^2 + y^2$ の形に表すことを考えた。

数論講義 (Disquisitiones) の中でガウスは、2 項 2 次方程式の包括的で美しい理論を開発した。最も重要なのは、2 つの形式の合成の定義と、判別式 $D = b^2 - 4ac$ を持つ 2 次形式が作る同値類の全体は合成に関して可換群 (今の言葉で) で形成されるという、証明である。2.2 章を参照。

2 項 2 次形式の合成の背後にある考え方は単純である：もし f と g が、それぞれ整数 m および n で表すと、その合成 $f * g$ は積 mn と表すべきである。このアイデアの実行は微妙であり、説明するのは非常に困難である。

2 項 2 次形式の合成に関するガウスの理論に概念的な洞察を得る試みは、当時の最高の数学者、ディリクレ、クンマー、デデキントの研究を刺激した。ここでも重要なアイデアは、より高度な数論の領域を拡張することと問題をより広い脈絡で見ることだった。ここでおそらく最も簡単な説明をしよう。

m_1 と m_2 が 2 つの平方数の和である場合、 $m_1 m_2$ も同様 2 つの平方数の和となる。実際、 $m_1 = x_1^2 + y_1^2$ および $m_2 = x_2^2 + y_2^2$ ならば

$$m_1 m_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2$$

である。

$f(x, y) = x^2 + y^2$ として 2 項 2 次形式の合成の用語では、次のように表現できる。

$$f(x_1, y_1) * f(x_2, y_2) = f(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

または

$$f * f = f$$

しかし、こういう風に合成を「単純」に法則化しても、ガウス整数を導入するまでは、神秘的でこの場合 (アドホック) だけのように見える。そしてガウス整数はそれを明白にさせた：

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 + y_1 i)(x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i) \\
&= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)(x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) \\
&= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)[\overline{(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)}] \text{ } (\bar{\alpha} \text{ denotes the conjugate of } \alpha) \\
&= [(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i][(x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i] \\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2
\end{aligned}$$

$\bar{\alpha}$ は複素数 α の共役複素数である。

一般に、 $ax^2 + bxy + cy^2 = m$ は、 $D = b^2 - 4ac$ とおくと

$$\frac{1}{a}[ax + (b + \sqrt{D})\frac{y}{2}][ax + (b - \sqrt{D})\frac{y}{2}] = m$$

と記述できます。このようにして、2 項 2 次形式による整数の表現の問題を、整域

$$R = \left\{ \frac{u+v\sqrt{D}}{2} : u, v \in \mathbb{Z}, u \equiv v \pmod{2} \right\}$$

で、定式化できた。そのような領域 R (いろいろな D に対して)、一般的に、一意的な因数分解という性質を持たないので、それらの数論の発展が重要な目標になった。[4]、[9] を参照。

要約：フェルマーの最終定理、相互法則、2 項 2 次形式というような、数論における中心的な問題を扱う際に、代数的整数の領域の問題としてそれらを定式化することが重要であることがわかった。そのような領域での一意分解性の研究は、新たに出現した主題—代数的数論の重要な問題となった。クンマーはそれを理想数で扱い、デデキントはイデアルを専門用語として扱い、クロネッカーは因数で扱った。クンマーとデデキントの貢献を以下で検討する。