長岡亮介数学勉強会
「A History of Abstract Algebra by I.Kleiner」
第 28 回（p50-51）

3 History of Ring Theory
3.2 Commutative ring theory 可換環論
3.2.1 Algebraic Number Theory 代数的数論
（iv）クンマーの理念的な数

円分整数 (cyclotomic integers) の整域、$D_p = \{a_0 + a_1\omega + \cdot\cdot\cdot + a_{p-1}\omega^{p-1}: a_i \in Z\}$、（ω は 1 の原始的な p 乗根）は、フェルマーの最終定理の研究において中心であったことを思い起こそう。これは高次相互法則の探究においても重要であることが証明された。相互法則と FLT 両方の問題はクンマーにとって非常に興味深いものだった（見かけ上は FLT よりも相互法則か)。そして重要な進歩を遂げるためには、整域 Dp で（ある種の）一意分解整域を確立することが必須だった。クンマーは 1840 年代にこれを成し遂げた。彼が Liouville(リウヴィル) 宛ての手紙に書いたように、D_p における一意分解整域は、“わたしが理念的な複素数と呼ぶところの新しい種類の複素数の導入によって、救いだすことができる”。クンマーの主結果は、円分整数の整域内のすべての要素が、” 理念的素数“の一意的な積である。　クンマーの理念的な数の理論は、あいまいで計算的だった。 実際、理念的な数と理念的な素数の中心概念は、それらの可除性の観点から暗示的にのみ定義された。 クンマーは、暗黙の定義を採用する際に、彼は化学の”フリーラジカル”、その存在はその有効性によってのみ識別できる物質だが、という考えに導かれたと書いている。　読者に理念的な数に関するクンマーの理論を理解してもらうために、デデキントによる領域

$$D = \{a + b\sqrt{5}i : a, b \in Z\}$$

ただし因数分解は一意ではないという標準例を提示しましょう。 たとえば

$$6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{5}i)(1 - \sqrt{5}i)$$

となり 2、3、$1 \pm \sqrt{5}i$ が D で素数（分解不能）であることはすぐにわかります。D に属する 6 に対する一意分解を回復するために、“理念的な数”

$$\sqrt{2}、\quad \tfrac{1+\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}、\quad \tfrac{1-\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}$$

を添加する。実際、これらが理念的な素数であって、以下を得る。

$$6 = 2 \times 3 = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\tfrac{1+\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}\times\tfrac{1-\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}$$
$$6 = (1 + \sqrt{5}i)(1 - \sqrt{5}i)$$
$$= \sqrt{2}\times\tfrac{1+\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}\times\tfrac{1-\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}$$

6 の理念的な素数への分解は今や一意的である。 さらに、理念的な素数

$$\sqrt{2}、\quad \tfrac{1+\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}、\quad \tfrac{1-\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}$$

の選択は、アドホック（その場しのぎ）と思われたが、理念的な数が導入されている後は自然に見える。

[7]、[13] を参照。